15 сентября 1996 года (осенний экзамен)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. В шестиугольнике все углы равны $120°$, и известны четыре последовательные его стороны. Найти две остальные.

2. Найти число положительных решений ($x > 0,\ y > 0$) системы уравнений

$$\begin{cases} x^y = y^x, \\ xy = 1. \end{cases}$$

3. В тетраэдре площадь каждой грани не меньше 1 и не больше 3, а наибольшая высота равна 4. Найти множество возможных значений наименьшей высоты в этом тетраэдре.

4. Найти остаток от деления многочлена $x^{99} + x^3 + 10x + 5$ на многочлен $x^2 + 1$.

5. Возьмем отрезок $[0, 1]$. Отрежем от него треть справа, затем треть слева и т. д. Указать точку, которая никогда не попадёт в отрезанную часть.

6. Дано число $\varepsilon > 0$. Определить наименьшее n, при котором функцию x^2 на отрезке $[-1; 1]$ можно приблизить с точностью до ε суммой n дробно-линейных функций. Это означает, что при некоторых значениях коэффициентов a_1, b_1, c_1, $d_1, \ldots, a_n$, b_n, c_n, d_n для всех x из отрезка $[-1; 1]$ должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} + \ldots + \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n} - x^2 \right| < \varepsilon.$$