21 апреля 1996 года (весенний экзамен)

Первые пять задач — по 10 баллов, шестая — 20 баллов

1. Произведение двух положительных чисел меньше 1. Доказать, что оно меньше их среднего арифметического.

2. От круглого колеса отпилили некоторое количество непересекающихся сегментов, при этом ось колеса, проходящая через центр, осталась нетронутой. Катясь по плоскости, колесо делает ровно один оборот. Доказать, что длина траектории центра колеса зависит только от размеров и количества отпиленных сегментов.

3. Два путника, имеющие один на двоих велосипед, вышли из А в Б. Чтобы двигаться быстрее, они договорились, что один из них поедет на велосипеде вперед, потом оставит его где-нибудь на дороге для другого, второй подберёт его и обгонит первого, затем также где-нибудь оставит велосипед, и так до тех пор, пока оба путника не окажутся одновременно в Б. Скорости путников (пешком) равны v_1, на велосипеде — v_2, $v_2 > v_1$. Сколько времени им понадобилось, если расстояние АБ равно l?

4. Рейку прямоугольного сечения обернули бумагой и распилили. Край распила на бумаге представляет собой ломаную, два последовательных угла которой равны $130°$ и $150°$. Найти угол между плоскостью распила и направлением рейки.

5. Есть произведение

$$(a_1 \pm b_1 \pm c_1)(a_2 \pm b_2 \pm c_2)\ldots$$

(100 скобок, в каждой один или два минуса). Доказать, что после раскрытия скобок члены с минусами будут составлять от 49 до 51 процента.

6. Найти максимально возможный радиус окружности, помещающейся внутрь прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a \leq b \leq c$.