7 сентября 1997 года

(осенний экзамен 1997 года)

Каждая задача оценивается в 10 баллов

1. В пространстве расположены цилиндр и окружность, не лежащая на его поверхности. Чему может быть равно количество точек пересечения окружности и боковой поверхности цилиндра?

2. Бильярдный стол представляет собой прямоугольник, вершины которого находятся в точках с координатами $(0,0)$, $(10,0)$, $(0,5)$ и $(10,5)$. Сколькими способами шар может попасть из точки $A(1,1)$ в точку $B(2,\sqrt{5}/2)$, испытав ровно 1997 отражений и ни разу не попав в угол стола? При отскоке шара от бортика угол падения равен углу отражения.

3. Вася написал на доске 100 различных целых положительных чисел, а Петя нашел их всевозможные попарные суммы (включая и суммы двух одинаковых чисел). В результате получилось 199 различных сумм. Какие числа были выписаны Васей, если известно, что среди них были числа 1 и 3, но не число 2?

4. Назовем шириной многоугольника наибольшее из попарных расстояний между вершинами этого многоугольника. Какие значения может принимать ширина проекции правильного пятиугольника на плоскость, если сторона пятиугольника равна 1, направление проектирования перпендикулярно плоскости проекции, а плоскость, в которой лежит пятиугольник, не перпендикулярна плоскости проекции?

5. Телефонная компания планирует перейти с поминутной оплаты (по 1000 рублей за каждую полную и неполную минуту разговора) на точную оплату (разговор стоит $1000t$ рублей, где t — время разговора в минутах). В связи с этим специалисты компании выбрали 100 звонков и подсчитали, что при точной оплате за эти звонки было бы получено на 30% денег меньше, чем при поминутной. Из выбранных 100 звонков ровно n имели длительность менее 3 минут. Найдите наименьшее возможное значение числа n.