7 сентября 1998 года

(осенний экзамен 1998 года)

1. Строго по меридиану от 30 градусов южной широты до 30 градусов северной широты плывет корабль. На палубе корабля закреплена пушка, ствол которой строго горизонтален и направлен под углом 30 градусов к курсу корабля. Найти угол между направлениями ствола пушки в начале и конце пути.

2. Доказать, что функция $y = sin(x) + sin(x\sqrt{2})$ не является периодической.

3. Доказать, что из системы неравенств

$$y + 1 \geqslant |2x|;$$
$$y - 2 \leqslant |x|;$$
$$y \geqslant 0$$

следует неравенство $x + (y-1)^2 \leqslant 19$.

4. Имеется бесконечный лист клетчатой бумаги (все клеточки — квадраты со стороной 1 см). Рассматриваются всевозможные отрезки длиной 10 см, не параллельные линиям сетки. Какое наибольшее и наименьшее число линий сетки может пересечь такой отрезок? (Если конец отрезка лежит на линии, это тоже считается пересечением.)

5. $f(x)$ — многочлен третьей степени. Всегда ли существуют такие многочлены первой степени $a(x)$ и $b(x)$, что выполнено тождество $f(x) = a(x)^3 + b(x)^3$? Коэффициенты многочленов - действительные числа.