28 июня 1998 года
(летний экзамен 1998 года)

1. Найти натуральное число, которое при делении на 9, 16 и 25 дает в остатке 2, 6 и 11 соответственно.

2. Построить взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(0;1)$ и отрезка $[0;1]$.

3. Сколько существует перестановок множества из 7 элементов, разлагающихся в произведение 3-цикла и двух 2-циклов (все циклы попарно не пересекаются)?

4. Есть ли общие действительные корни у многочленов $x^4+2x^3+x^2+1$ и $-x^4+x^2+2x+1$?

5. Описать и изобразить на комплексной плоскости множество комплексных чисел a, для которых уравнение $z+(1/z)=a$ имеет решение, по модулю меньшее единицы.

6. Множество действительных чисел X получается всеми возможными перестановками цифр в бесконечной десятичной дроби, которой записывается число $1/7$. Найти точную верхнюю и точную нижнюю грань этого множества.

7. Указать какое-нибудь $M>0$ такое, что при всех $x>M$ погрешность приближенной формулы $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\approx 1/(2\sqrt{x})$ не превосходит 0,01% ее правой части.

8. Доказать, что если функция f из множества действительных чисел во множество действительных чисел принимает значения разных знаков, то найдутся две точки на расстоянии менее 0,001, в которых функция имеет разный знак [если одно из двух чисел равно нулю, то считаем, что они имеют разный знак].

9. Найти $\int_0^2 g(x)\,dx$, где $g(a)$ — решение уравнения $x+x^5=a$.

10. Доказать, что ряд

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\dots$$

сходится; указать десятичную дробь, отстоящую от его суммы не более чем на 0,001 (ответ должен быть обоснован, калькулятором пользоваться нельзя).

11. Рассмотрим правильный 6-угольник $ABCDEF$. Описать движение плоскости, которое получается композицией отражений относительно прямых AB, BC, CD, DE, EF, FA, взятых в указанном порядке.

12. Назовем «супермагическим квадратом» квадратную таблицу 4×4, заполненную действительными числами таким образом, что сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равна нулю. Найти размерность векторного пространства, состоящего из всех супермагических квадратов.