28 июня 1999 года
(летний экзамен 1999 года)

1. Найдите наибольший общий делитель чисел

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43$$

и

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43.$$

(точка обозначает умножение).

2. Докажите, что при некотором действительном a из многочлена

$$p(x) = a + x^4 + (x-1)^4 + (x-2)^4 + \cdots + (x-10)^4$$

«извлекается квадратный корень» (другими словами, есть многочлен с действительными коэффициентами $q(x)$ такой, что $p = q^2$).

3. Про комплексные числа z и w известно, что $|z-1| < 0{,}5$ и $|w-i| < 0{,}5$. Может ли так случиться, что —z/w-1—¡0,5?

4. Сколькими способами можно раскрасить вершины $A_1, A_2, \ldots, A_11$ правильного 11-угольника в синий и красный цвет так, чтобы полученная картинка не имела оси симметрии?

5. Некоторое множество попарно непересекающихся отрезков прямой покрасили в белый цвет. Может ли так случиться, что на любом отрезке есть белая точка? (Точка отрезком не считается.)

6. Докажите, что любой отрезок луча $[2; +\infty)$ содержит лишь конечное число точек вида a^a/b^b, где a и b — натуральные числа.

7. Докажите, что никакая целая степень числа $(1+\sqrt{-15})/4$ не равна 1.

8. Возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ натуральных чисел такова, что суммы $a_i + a_j$ пар чисел из этой последовательности попарно различны. Докажите, что ряд

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \ldots$$

9. Докажите, что сумма

$$p_1 \ln\Big(\frac{p_1}{q_1}\Big) + \cdots + p_n \ln\Big(\frac{p_n}{q_n}\Big)$$

неотрицательна, если

$$p_1 + \cdots + p_n = q_1 + \cdots + q_n = 1$$

и все числа $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ положительны. Найдите все случаи, когда неравенство обращается в равенство.

10. Непрерывная на действительной прямой функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению $f(f(x)) = f(x)$. Известно, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Найдите все возможные значения $f(1/2)$.

11. Докажите, что любой пповорот относительно прямой в трехмерном пространстве есть композиция двух поворотов на 180 градусов.

12. Множество P в шестимерном координатном пространстве $\mathbb{R}^6$ состоит из таких точек $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, что точки (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6) являются вершинами правильного треугольника в $\mathbb{R}^2$, перечисленными в порядке обхода против часовой стрелки. Найдите наименьшую размерность подпространства в $\mathbb{R}^6$, содержащего монжество P.