Письменный экзамен по алгебре за первый семестр

для получения оценки «отлично» достаточно набрать 50 баллов

Задача 1 (10 баллов). Докажите, что с точностью до изоморфизма имеется ровно одно поле из четырёх элементов и укажите его таблицы сложения и умножения.

Задача 2 (10 баллов). Представьте отношение определителей n-того порядка:

$$\det\begin{pmatrix} x_1^{n+1} & x_1^{n-2} & x_1^{n-3} & \cdots & 1 \\ x_2^{n+1} & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{n+1} & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & x_1^{n-3} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

в виде многочлена от элементарных симметрических функций $e_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Задача 3 (10 баллов). Опишите модуль $M \subset \mathbb{Z}^4$ всех целочисленных решений системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 14\,x_2 + 19\,x_3 = 0 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 5\,x_4 = 0 \end{cases}$ и фактор-модуль $\mathbb{Z}^4 / M$.

Задача 4 (10 баллов). Найдите наибольшую из степеней всех неприводимых делителей многочлена $x^{p^k} - x$ над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Задача 5 (10 баллов). Всякая ли дискретная[1] подгруппа аддитивной группы векторного пространства $\mathbb{R}^n$ является свободным $\mathbb{Z}$-модулем с $\leqslant n$ образующими?

Задача 6 (10 баллов). Докажите, что знакопеременная группа $\mathfrak{A}_5$ проста (т. е. не содержит нетривиальных нормальных подгрупп).

[1] подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если каждая его точка x изолирована (т. е. имеет окрестность, не содержащую отличных от x точек из M)

Задача 7 (10 баллов). Обозначим через a_n число всех способов разрезать выпуклый $(n+1)$-угольник на треугольники по непересекающимся нигде кроме вершин диагоналям. Найдите прозводящую функцию последовательности (a_n).

Задача 8 (10 баллов). Пусть $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$ — поле, $x^2 - d \in \mathbb{F}[x]$ неприводим над $\mathbb{F}$, и $\mathbb{F}(d) = \mathbb{F}[x]/(x^2-d) \simeq \{\alpha + \beta\sqrt{d} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{F}\}$ — соответствующее квадратичное расширение поля $\mathbb{F}$. Существует ли кубический многочлен $f \in \mathbb{F}[x]$, имеющий корень в $\mathbb{F}(d)$, но без корней в $\mathbb{F}$? Можно ли циркулем и линейкой построить правильный семиугольник?

Задача 9 (10 баллов). Рассмотрим элементы $n \times n$ - матриц A и B как независимые переменные. Найдите частную производную $\dfrac{\partial^k \det A}{\partial a_{i_1 j_1} \partial a_{i_2 j_2} \cdots \partial a_{i_k j_k}}$ и выразите коэффициент при $\lambda^k \mu^{n-k}$ в разложении $\det(\lambda A + \mu B)$ по степеням λ и μ через миноры матриц A и B. ([2])

Задача 10 (10 баллов). Вычислите $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)^n$.

[2]например, можно сравнить его с $tr\left(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} B^t\right)$