Письменный экзамен по алгебре за первый семестр

для получения оценки «отлично» достаточно набрать 50 баллов

Задача 1 (10 баллов). Перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ равна произведению независимых k_1 циклов длины 1, k_2 циклов длины 2, k_3 циклов длины 3, $\dots$, k_n циклов длины n. Выразите число всех перестановок, сопряжённых с σ, через n и $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Задача 2 (10 баллов). Сколько корней имеет уравнение $x^7 = 35$ в $\mathbb{Z}/601\mathbb{Z}$?

Задача 3 (10 баллов). Существует ли в $\mathbb{Z}$-модуле

а) $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$

б) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

такой подмодуль W, который нельзя было бы отщепить прямым слагаемым (т. е. подобрать к нему дополнительный подмодуль W, такой что весь модуль распадётся в прямую сумму $V \oplus W$).

Задача 4 (10 баллов). Наименьший простой делитель порядка конечной группы равен 3. Всякая ли её подгруппа индекса 3 нормальна?

Задача 5 (10 баллов). Приводим ли в $\mathbb{Z}[x]$ многочлен $x^6 + x^3 + 1$?

Задача 6 (10 баллов). Является ли обращение в нуль всех миноров m-того порядка у матрицы системы из $n > m$ однородных линейных уравнений от m неизвестных (над полем)

а) необходимым

б) достаточным

для существования у такой системы нетривиального решения?

Задача 7 (10 баллов). Сколько имеется полей из 8 элементов и может ли такое поле содержать поле из 4 элементов?

Задача 8 (10 баллов). Вычислите 2001-ю производную в нуле (или, если угодно, 2001-й член разложения в ряд Тейлора вблизи нуля) от $(1 + x + x^2)^{-1}$.

Задача 9 (10 баллов). Матрица A размера $n \times n$ имеет ранг $n - 1$. Каков ранг у её присоединённой матрицы $A^\vee$?