АЛГЕБРА 2000/2001
I СЕМЕСТР

Ф.Зак, А.Иншаков, А.Обломков, С.Дориченко, О.Карпенков

Листок 1

Задача 1.1. Когда полилинейное отображение $V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ является линейным оператором из $\bigoplus_i V_i$ в W и наоборот?

Упражнение 1.2. Докажите, что множество всех полилинейных отображений $V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ является линейным пространством и найдите его размерность.

Задача 1.3. Покажите, что в наборе $(v_1, \ldots, v_k) \in V_1 \times \ldots \times V_k$ все v_i отличны от нуля тогда и только тогда, когда найдётся полилинейная форма, принимающая ненулевое значение на этом наборе.

Определение 1.1. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_k$ — векторные пространства над полем $\mathcal{F}$. Тогда *тензорным произведением пространств* $V_1, \ldots, V_k$ называется пара из векторного пространства, обозначаемого через $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$ и полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \to V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$ обладающего следующим свойством: для любого векторного пространства W и полилинейного отображения $\psi : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \to W$ найдётся единственный линейный оператор $\gamma : V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k \to W$, $\psi = \gamma \circ \varphi$.

Упражнение 1.4. Докажите единственность тензорного произведения с точностью до изоморфизма, сохраняющего структуру тензорного произведения.

Конструкция тензорного произведения. Рассмотрим (бесконечномерное) векторное пространство $\mathcal{U}$, порождённое *всевозможными* формальными выражениями вида $v_1 \cdot \ldots \cdot v_k$ $(v_i \in V_i)$. Рассмотрим линейное подпространство $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$, порождённое комбинациями вида

$$v_1 \cdot \ldots \cdot (\lambda v_i' + \mu v_i'') \cdot \ldots \cdot v_k - \lambda v_1 \cdot \ldots \cdot v_i' \cdot \ldots \cdot v_k - \mu v_1 \cdot \ldots \cdot v_i'' \cdot \ldots \cdot v_k.$$

Положим $P = \mathcal{U}/\mathcal{E}$. Полилинейное отображение из $V_1 \times \ldots \times V_k$ строится по правилу $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \pmod{\mathcal{E}}$.

Задача 1.5. Покажите, что построенная пара удовлетворяет определению тензорного произведения.

Упражнение 1.6. Опишите конструкцию прямой суммы пространств, сходную с приведённой выше для тензорного произведения.

Упражнение 1.7. Пусть векторы $e_1, \ldots, e_d \in V$ линейно независимы. Докажите, что для любого i $\langle e_i \rangle \otimes W$ изоморфно W, и сумма $\langle e_1 \rangle \otimes W + \ldots + \langle e_d \rangle \otimes W$ является прямой и изоморфна $\langle e_1, \ldots, e_d \rangle \otimes W$.

Упражнение 1.8. Найдите базис пространства $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$, зная базисы пространств $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

Упражнение 1.9. Найдите канонический изоморфизм между $V^* \otimes W$ и $Hom(V, W)$.

Задача 1.10. Докажите, что:

(1) $(V_1 \oplus V_2) \otimes W = (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$;
(2) $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.

Определение 1.2. Вектора из множества $\varphi(V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k) \subset V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$ называются *разложимыми*. Обозначение: $\varphi((v_1, \ldots, v_k)) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$, $v_i \in V_i$.

Задача 1.11. Докажите, что $v \otimes w = v' \otimes w' \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v = \lambda v'$ и $w' = \lambda w$.

Задача 1.12. При каких условиях все векторы пространства $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$ разложимы?

Задача 1.13. Рассмотрим отображение τ из $V_1^* \times \ldots \times V_k^*$ в пространство полилинейных форм на $V_1 \times \ldots \times V_k$, которое переводит набор $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ в форму $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto \xi_1(v_1) \ldots \xi_k(v_k)$. Это полилинейное (проверьте!) отображение определяет линейное отображение из $V_1^* \otimes \ldots \otimes V_k^*$ в пространство полилинейных форм на $V_1 \times \ldots \times V_k$. Докажите, что это отображение является изоморфизмом.

Определение 1.3. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_k, W_1, W_2, \ldots, W_k$ — векторные пространства, $A_i : V_i \to W_i$ — линейные операторы. Построим естественное отображение $A_1 \times \ldots \times A_k : V_1 \times \ldots \times V_k \to W_1 \times \ldots \times W_k$. Оно, очевидно, продолжается до полилинейного отображения $V_1 \times \ldots \times V_k \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_k$. Для последнего отображения найдётся линейный оператор $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_k$. Это отображение обозначется через $A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_k$ и называется *тензорным произведением отображений* $A_1, \ldots, A_k$.

Задача 1.14. Пусть V_1, V_2 — векторные пространства, $\dim V_i = n_i$, $A_i : V_i \to V_i$ — эндоморфизм, $i = 1, 2$. Докажите, что $\det A_1 \otimes A_2 = (\det A_1)^{n_2} (\det A_2)^{n_1}$.

Задача 1.15. Пусть A_i: $V_i \to W_i$ $(i = 1, 2)$– линейные отображения. Докажите, что:

(1) $\mathrm{Im}(A_1 \otimes A_2) = (\mathrm{Im}\, A_1) \otimes (\mathrm{Im}\, A_2)$;
(2) $\mathrm{Im}(A_1 \otimes A_2) = (\mathrm{Im}\, A_1 \otimes W_2) \cap (W_1 \otimes \mathrm{Im}\, A_2)$;
(3) $\mathrm{Ker}(A_1 \otimes A_2) = \mathrm{Ker}\, A_1 \otimes V_2 + V_1 \otimes \mathrm{Ker}\, A_2$.

Задача 1.16. Проверьте, используя цепочку изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}(U_1, U_2) \otimes \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \simeq U_1^* \otimes U_2 \otimes V_1^* \otimes V_2 \simeq (U_1 \otimes V_1)^* \otimes (U_2 \otimes V_2) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}(U_1 \otimes V_1, U_2 \otimes V_2),$$

что тензорное произведение операторов $f : U_1 \to V_1$ и $g : U_2 \to V_2$ совпадает с тензорным произведением соответствующих им тензоров.

Определение 1.4. Элементы пространства $(V^*)^{\otimes l} \otimes V^{\otimes k}$ называются *тензорами типа* (l, k).

Упражнение 1.17. Пусть $A = (a_i^j)$ — автоморфизм пространства V. Как преобразуются координаты тензора типа (k, l) при автоморфизме $A^{\otimes k} \otimes (A^*)^{\otimes l}$?

Задача 1.18. Найдите все тензоры типа (n, k), координатная запись которых не меняется при замене координат (например, тензор δ_i^j таков).

Задача 1.19. Пусть V – евклидово пространство, и V^* естественным образом отождествлено с V (с помощью скалярного поизведения). Докажите, что оператор $A = E - 2a \otimes a$, где a — вектор единичной длины, является симметрией относительно гиперплоскости $\{x|(x, a) = 0\}$.

Задача 1.20. Пусть σ — перестановка k элементов. Определим отображение f_σ на разложимых векторах пространства $V^{\otimes k}$ по следующей формуле: $f_\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k)}$. Покажите, что это отображение продолжатся до изоморфизма пространства $V^{\otimes k}$.

Определение 1.5. Тензор $w \in V^{\otimes k}$ называется *симметрическим* (*кососимметрическим*), если для любой транспозиции σ $f_\sigma(w) = w$ ($f_\sigma(w) = -w$). Пространство симметрических (кососимметрических) тензоров обозначается через $S^k V$ ($\Lambda^k V$). Элементы пространства $\Lambda^k V$ также называются k-*векторами*.

Упражнение 1.21. Приведите конструкцию пространства симметрических (кососимметричеких) тензоров, сходную с конструкцией тензорного произведения.

Определение 1.6. Пусть $\operatorname{char} \mathcal{F} = 0$. Оператор $S = \frac{1}{k!} \sum_\sigma f_\sigma$ называется *симметризацией*, а оператор $A = \frac{1}{k!} \sum_\sigma (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} f_\sigma$ — *антисимметризацией* или *альтернированием*.

Упражнение 1.22. Проверьте, что линейный оператор

(1) $S : V^{\otimes k} \to S^k V$;
(2) $A : V^{\otimes k} \to \Lambda^k V$

является сюръективным.

Упражнение 1.23. Найдите $\dim S^k V$, $\dim \Lambda^k V$.

Задача 1.24. При каких k $V^{\otimes k} = S^k V \oplus \Lambda^k V$?

Задача 1.25. Пусть $t \in V^* \otimes V^*$– тензор типа $(0, 2)$, задающий билинейную форму, обладающую следующим свойством: $t(v, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $t(u, v) = 0$. Докажите, что t — либо симметричный, либо кососимметричный тензор.

Упражнение 1.26. Докажите, что трилинейная функция, симметричная по первым двум аргументам и антисимметричная по двум последним аргументам, является тождественно нулевой функцией.

Задача 1.27. Пусть $A : V \to V$ — линейное отображение. Оно индуцирует отображение $\Lambda^i A : \Lambda^i V \to \Lambda^i V$. Покажите, что $\det(\lambda A + E) = 1 + \sum_{i=1} \lambda^i \operatorname{tr}(\Lambda^i A)$, где через $\operatorname{tr} B$ обозначен след оператора B.

Определение 1.7. Пусть $\omega_1 \in \Lambda^k V$, $\omega_2 \in \Lambda^l V$. Положим $\omega_1 \wedge \omega_2 = A(\omega_1 \otimes \omega_2)$. Операция $\wedge$ называется *внешним умножением*.

Упражнение 1.28. Докажите ассоциативность и дистрибутивность относительно сложения операции внешнего умножения. Выразите $\omega_2 \wedge \omega_1$ через $\omega_1 \wedge \omega_2$.

Задача 1.29. Пусть B — матрица билинейной формы в базисе $e_1, \dots, e_n$. Как преобразуется выражение $\sqrt{\det(B)} e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ при переходе к другому базису (сравните с тензором типа $(0, n)$)?

Задача 1.30. Пусть B — матрица кососиметричной формы в базисе $e_1, \dots, e_n$. Тогда $\omega \wedge \dots \wedge \omega = \mathrm{Pf}(B) e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$, где $2\omega = \sum_{i,j} b_{ij} e_i^* \wedge e_j^*$, $\mathrm{Pf}(B) = \sqrt{\det B}$ — пфаффиан матрицы B (см. задачу 1.43 за первый курс).

Задача 1.31. Докажите, что если $S(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = S(y_1 \otimes \dots \otimes y_k)$, то $\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle y_1 \dots, y_k \rangle$.

Упражнение 1.32. Пусть V - векторное пространство, $x_1, \dots, x_k \in V$. Докажите, что $x_1 \wedge \dots \wedge x_k = 0$ тогда и только тогда, когда $\dim(\langle x_1, \dots, x_k \rangle) < k$.

Задача 1.33. Покажите, что $x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \lambda y_1 \wedge \dots \wedge y_k \neq 0$ ($\lambda \in \mathcal{F}$ — скаляр) тогда и только тогда, когда $\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$.

Итак, разложимые k-вектора над пространством V соответствуют линейным подпространствам в V.

Определение 1.8. Множество k-мерных линейных (проективных) подпространств N-мерного линейного (проективного) пространства называется *грассманианом* и обозначается через $Gras(N, k)$ $(G(N, k))$.

Определение 1.9. Отождествление $Gras(N, k)$ $(G(N-1, k-1))$ с проективизацией множества разложимых k-векторов пространства $\Lambda^k \mathbb{C}^N$, называется *плюккеровым вложением*, а проективные координаты на проективизации пространства $\Lambda^k \mathbb{C}^N$, перенесённые на грассманиан, называются *плюккеровыми координатами на грассманиане.*

Далее везде мы будем рассматривать только плюккеровы вложения грассманианов, то есть все грассманианы подразумеваются подмножествами проективного пространства.

Упражнение 1.34. Покажите, что следующие грассманианы изоморфны: $Gras(N, k)$, $G(N-1, k-1)$, $Gras(N, N-k)$, $G(N-1, N-k-1)$.

Задача 1.35. Найдите размерность $G(N, k)$.

Далее мы выведем уравнения разложимости поливектора, то есть мы хотим найти уравнения на $\omega_{i_1, \dots, i_k}$, с помощью которых можно было бы определить разложимый поливектор $\Omega = \sum_i \omega_i e_i$, здесь и далее $i = i_1 < \dots < i_k$ — упорядоченный полииндекс.

Как мы видели, разложимые k-вектора соответсвуют линейным подпространствам размерности k. Символом $[\Omega]$ будем обозначать k-мерное подпространство, отвечающее разложимому k-вектору Ω.

Упражнение 1.36. Пусть $u \in V$ и $u \wedge \Omega = 0$, $\Omega \in \Lambda^k V$. Тогда $\Omega = u \wedge \Omega'$, $\Omega' \in \Lambda^{k-1} V$.

Упражнение 1.37. Пусть k-вектор Ω разложим. Тогда $v \in [\Omega]$ тогда и только тогда, когда $v \wedge \Omega = 0$.

Упражнение 1.38. Пусть $\Omega \in \Lambda^{n-1}V$, $\dim V = n$. Тогда Ω разложим.

Введем некоторые вспомогательные определения.

Определение 1.10. Для произвольного ковектора $v^* \in V^*$ определено *внутреннее умножение на ковектор*, которое является линейным отображением $i(v^*) : \Lambda^k V \to \Lambda^{k-1}V$, таким что $\langle i(v^*)\Omega, \Theta\rangle = \langle \Omega, v^* \wedge \Theta\rangle$ для любого $\Theta \in \Lambda^{k-1}V^*$.

В этом определении и далее $\langle u, w\rangle$ — обозначение для стандартного спаривания вектора и ковектора.

Каждому поливектору Ω сопоставим пространства $\Omega^\perp = \mathrm{Ann}(\{v^* \in V^* | i(v^*)\Omega = 0\})$, $\Omega' = \{v \in V | v \wedge \Omega = 0\}$.

Упражнение 1.39. Докажите, что $\dim \Omega' \leq k$, где $\Omega \in \Lambda^k V$.

Теорема $\Omega^\perp$ является минимальным подпространством в V таким, что Ω лежит в образе отображения $\Lambda^k\Omega^\perp \to \Lambda^k V$.

Докажем сначала последнее утверждение теоремы. Для этого выберем в V следующий базис: $w_1, \ldots, w_l, u_{l+1}, \ldots, u_n$, $\langle w_1, \ldots, w_2\rangle = \Omega^\perp$; $w_1^*, \ldots, w_l^*, u_{l+1}^*, \ldots, u_n^*$ — двойственный базис в V^*. Заметим, что $\langle u_{l+1}^*, \ldots, u_n^*\rangle$ это $Ann(\Omega^\perp)$. Пусть $U = \langle u_{l+1}, \ldots, u_n\rangle$, тогда $V = U \oplus \Omega^\perp$ индуцирует разложение:

$$\Lambda^k V = \oplus_{i=0}\Lambda^i U \wedge \Lambda^{k-i}\Omega^\perp.$$

Мы хотим показать, что Ω лежит в первом слагаемом. Пусть $\hat{\Omega} = \sum \Omega_\alpha \wedge u_\alpha$ — компонента Ω во втором слагаемом разложения $\Lambda^k V$. Так как

$$i(u_\alpha^*) : \Lambda^i U \wedge \Lambda^{k-i}\Omega^\perp \to \Lambda^{i-1}U \wedge \Lambda^{k-i}\Omega^\perp,$$

то условие $i(u_\alpha^*)\Omega = 0$ влечет условие $i(u_\alpha^*)\hat{\Omega} = \Omega_\alpha = 0$; таким образом $\hat{\Omega} = 0$.

Упражнение 1.40. Докажите, что оставшиеся компоненты в $\Lambda^i U \wedge \Lambda^{k-i}\Omega^\perp$ $(i > 1)$ поливектора Ω также равны нулю.

Теперь докажем минимальность. Если $W' \subset V$ — линейное подпространство такое, что Ω лежит в образе отображения $\Lambda^k W' \to \Lambda^k V$, то $Ann(W') \subset Ann(\Omega^\perp)$, а, следовательно, $\Omega^\perp \subset W'$.

Задача 1.41. Докажите, что поливектор Ω разложим тогда и только тогда когда $\Omega^\perp = \Omega'$.

Теперь докажем, что условие разложимости поливектора может быть записано в виде системы полиномиальных уравнений на плюкеровы координаты поливектора, причем степень каждого уравнения системы не выше чем 2. Для этого предъявим метод построения $\Omega^\perp$.

Определение 1.11. Для произвольного поливектора $\Xi \in \Lambda^{k-1}V^*$ определено линейное отображение $i(\Xi) : \Lambda^k V \to V$, такое что $\langle i(\Xi)(\Omega), v^*\rangle = \langle \Omega, v^* \wedge \Xi\rangle$ для любого $v^* \in V^*$.

Определим отображение $\phi_\Omega : \Lambda^{k-1}V^* \to V$: $\phi_\Omega(\Xi) = i(\Xi)(\Omega)$.

Задача 1.42. $\Omega^\perp = \mathrm{Im}\,\phi_\Omega$ (Указание: рассмотрите отображение, двойственное отображению ϕ_Ω и воспользуйтесь тем, что аннулятор образа ϕ_Ω является ядром двойственного отображения).

Задача 1.43. Ω разложим, тогда и только тогда, когда $i(\Xi)(\Omega) \wedge \Omega = 0$, для всех $\Xi \in \Lambda^{k-1}V^*$.

Упражнение 1.44. Пусть $\Omega \in \Lambda^2 V$. Тогда Ω разложим тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \Omega = 0$.

Упражнение 1.45. Докажите, что $G(3,1) \subset \mathbb{P}^5$ является неособой квадрикой.

Упражнение 1.46. Докажите, что прямая, пересекающая грассманиан в более чем трёх точках, лежит внутри грассманиана.

Упражнение 1.47. Пусть $z \in \mathbb{P}^3$ — некоторая точка, $L \subset \mathbb{P}^3$ — некоторая плоскость и пусть $\Omega(z) \subset G(3,1)$ — множество прямых, проходящих через z, $\Omega(L) \subset G(1,3)$ — множество прямых, лежащих в L.

(1) Докажите, что $\Omega(z)$ и $\Omega(L)$ являются плоскостями.
(2) Опишите, как эти плоскости пересекаются.
(3) Докажите, что если $\mathbb{P}^2 \subset G(3,1)$ — плоскость в грассманиане, то либо $\mathbb{P}^2 = \Omega(z)$ для некоторого $z \in \mathbb{P}^3$, либо $\mathbb{P}^2 = \Omega(L)$ для некоторой плоскости $L \subset \mathbb{P}^3$.

Задача 1.48. Чему на $G(3,1)$ соответствует семейство прямых-образующих на стандартной квадрике в $\mathbb{P}^3$?

Задача 1.49. Пусть V — векторное пространство, и пусть $\Omega \subset \Lambda^p V$ — линейное подпространство, состоящее из разложимых кососимметрических p-векторов. Докажите, что либо все подпространства $[\Omega]$ имеют общее $(p-1)$-мерное подпространство, либо все они лежат в одном $(p+1)$-мерном подпространстве.

Задача 1.50. Пусть V — векторное пространство, $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in V$, тензоры $z_1 = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ и $z_2 = y_1 \wedge \dots \wedge y_p$ непропорциональны, $X = \langle x_1, \dots, x_p \rangle$ и $Y = \langle y_1, \dots, y_p \rangle$. Докажите, что все p-векторы на прямой $\langle z_1, z_2 \rangle \subset \Lambda^p V$ разложимы тогда и только тогда, когда $\dim(X \cap Y) = p-1$.

Задача 1.51. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in G(N,p)$, $p \geq \frac{N}{2}$, $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^N$ — соответствующие им подпространства. Опишите в геометрических терминах условие на точки α_1, α_2 того, что $\dim L_1 \cap \dim L_2 = k$.

Задача 1.52. Пусть $\Omega \in \Lambda^2 V$. Докажите, что если существует разложение $\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_k$, где бивектора Ω_i суть образы при альтернировании разложимых, то $\Omega^{\wedge(k+1)} = 0$, и наоборот.

Задача 1.53. Найдите максимальную размерность линейного (проективного) пространства, содержащегося в $G(N,k)$.

Задача 1.54. Пусть $H \subset \mathbb{P}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$ — некоторая гиперплоскость, $z \in \mathbb{P}^n$. Пусть $\Omega_H(z) \subset G(1,n)$ — множество прямых из $G(1,n) \cap H$, проходящих через z.

(1) Докажите, что $\Omega_H(z) = \Omega(z, \mathbb{P}^k_z)$, где $k = n, n-1$ и $\Omega(z, \mathbb{P}^k_z)$ — множество прямых, проходящих через z и содержащихся в $\mathbb{P}^k_z$.
(2) Опишите множество C_H точек $z \in \mathbb{P}^N$ таких, что $\Omega_H(z) = \Omega(z, \mathbb{P}^n)$. Докажите в частности, что при чётном n $C_H \neq \emptyset$, а при нечётном n существует такая гиперплоскость H, что $C_H = \emptyset$.

Определение 1.12. Множество $G(n,1) \cap H$ называют *линейным комплексом прямых*, а множество C_H — *центром линейного комплекса*.