АЛГЕБРА 2000/2001
I СЕМЕСТР

. , . , . , . , .

Листок 2

Пусть k — алгебраически замкнутое поле, n — натуральное число, и пусть $\mathbb{A}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), |\ x_i \in k, i = 1, \ldots, n\}$ — n-мерное *аффинное пространство над полем* k. Введём *топологию Зариского* на $\mathbb{A}^n$ с помощью следующего определения.

Определение 2.1. Подмножество $X \subset \mathbb{A}^n$ называется *замкнутым по Зарискому*, если X — множество решений системы уравнений $f_\alpha = 0$, где α — произвольное множество индексов, а $f_\alpha \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Замкнутые по Зарискому подмножества $\mathbb{A}^n$ называются также *аффинными алгебраическими многообразиями.*

Подмножество $U \subset X$ замкнутого по Зарискому множества $X \subset \mathbb{A}^n$ называется *открытым по Зарискому*, если его дополнение $X \setminus U$ замкнуто.

Согласно теореме Гильберта о базисе (см. теорему 3.4 в листке 3 за первый семестр прошлого года), замкнутое по Зарискому множество можно задать *конечной* системой полиномиальных уравнений.

Упражнение 2.1. Докажите, что определённая выше система замкнутых множеств обладает обычными для топологии свойствами: пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых подмножеств замкнуто.

Упражнение 2.2. Пусть $X \subset \mathbb{A}^m$ и $Y \subset \mathbb{A}^n$ — замкнутые подмножества. Докажите, что их произведение $X \times Y = \{(x, y) \in \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \mid x \in X, y \in Y\}$ замкнуто в $\mathbb{A}^{m+n} = \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$.

Упражнение 2.3. Найдите все замкнутые по Зарискому подмножества на прямой $\mathbb{A}^1$.

Задача 2.4. Докажите, что всякое замкнутое по Зарискому подмножество на плоскости $\mathbb{A}^2$ является объединением плоской кривой и конечного множества точек (здесь плоской кривой мы называем множество точек $(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2$, удовлетворяющих одному уравнению $f(x_1, x_2) = 0$). В частности, если НОД $\{f_\alpha\} = 1$, т.е. многочлены f_α взаимно просты, то система уравнений $f_\alpha = 0$ имеет конечное число решений.

Упражнение 2.5. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — замкнутое по Зарискому подмножество, заданное уравнениями степени не выше d. Докажите, что X можно задать системой полиномиальных уравнений степени d.

Упражнение 2.6. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — конечное множество, состоящее из d различных точек. Докажите, что X замкнуто по Зарискому. Докажите, что X можно задать системой уравнений степени не выше d.

Задача 2.7. В условиях упражнения 2.6 предположим, что X невырождено, т.е. X не содержится ни в каком аффинном подпространстве $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$. Найдите наименьшее число $r = r(d, n)$ такое, что X можно задать уравнениями степени не выше r.

Задача 2.8. В условиях задачи 2.7 предположим дополнительно, что точки X находятся в общем положении, т.е. для любых точек $x_1, \ldots, x_r \in X$ таких, что $x_i \neq x_j$ при $1 \leq i < j \leq r$, $1 \leq r \leq n+1$ имеем $\dim \langle x_1, \ldots, x_r \rangle = r - 1$, где $\langle A \rangle$ обозначает аффинное подпространство, натянутое на $A \subset \mathbb{A}^n$. Найдите число $r = r(d, n)$ в этом случае.

Задача 2.9. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^{n+1}$ такое, что $\varphi(x) = (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n)$. Докажите, что $\varphi(\mathbb{A}^1)$ замкнуто по Зарискому в $\mathbb{A}^{n+1}$.

Топология Зариского на $\mathbb{A}^n$ индуцирует топологию на произвольном замкнутом по Зарискому подмножестве $X \subset \mathbb{A}^n$.

Упражнение 2.10. Пусть $k = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Докажите, что всякое замкнутое по Зарискому подмножество X замкнуто в обычной топологии. Верно ли обратное?

Задача 2.11. Для каких замкнутых подмножеств $X \subset \mathbb{A}^n$ топология Зариского на X хаусдорфова?

Решив предыдущую задачу, вы убедились, что топология Зариского довольно необычна - как правило, различные точки не обладают непересекающимися окрестностями. Ещё одно непривычное свойство топологии Зариского — её нётеровость.

Определение 2.2. Топологическое пространство X называется *нётеровым* (в честь Эмми Нётер), если произвольная убывающая цепочка замкнутых подпространств $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_r$ стабилизируется. Аналогично, топологическое пространство X называется *артиновым* (в честь Эмиля Артина), если произвольная возрастающая цепочка замкнутых подпространств $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_r$ стабилизируется.

Упражнение 2.12. Пусть X — нётерово топологическое пространство. Докажите, что X *квазикомпактно*, т.е. из каждого открытого покрытия X можно выбрать конечное.

Упражнение 2.13. Пусть X — замкнутое по Зарискому подмножество аффинного пространства $\mathbb{A}^n$.

а) Докажите, что X нётерово в топологии Зариского;
б) Когда X артиново в топологии Зариского?
в) Пусть $k = \mathbb{C}$. Когда X является нётеровым или артиновым в обычной топологии?

Определение 2.3. Топологическое пространство X называется *неприводимым*, если X нельзя нетривиальным образом представить в виде объединения двух замкнутых подмножеств, т.е. если $X_1, X_2 \subset X$ — замкнутые подмножества и $X = X_1 \cup X_2$, то $X = X_1$ или $X = X_2$.

Упражнение 2.14. Докажите, что топологическое пространство X неприводимо тогда и только тогда, когда всякое открытое подмножество $U \subset X$ всюду плотно в X, т.е. $\overline{U} = X$, где $\overline{U}$ обозначает замыкание U, т.е. наименьшее замкнутое подмножество X, содержащее U.

Упражнение 2.15. Пусть X — замкнутое по Зарискому подмножество аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Когда X неприводимо в обычной топологии?

Задача 2.16. Пусть X — нётерово топологическое пространство. Докажите, что $X = \bigcup X_i$, где X_i — замкнутые неприводимые подмножества и $X_i \not\subseteq X_j$ при $i \neq j$, причём такое разложение единственно. Подмножества X_i называются *неприводимыми компонентами* X.

Задача 2.17. Можно ли задать одну из ветвей гиперболы $x \cdot y = 1$ в $\mathbb{R}^2$ полиномиальными уравнениями?

Задача 2.18. Пусть $X, Y \subset \mathbb{A}^2$ — плоские алгебраические кривые, заданные уравнениями $F = 0$ и $G = 0$ соответственно. Сформулируйте условия, необходимые и достаточные для того, чтобы кривые X и Y были гомеоморфны друг другу в топологии Зариского.

Задача 2.19. Пусть $X \subset \mathbb{A}^m$ и $Y \subset \mathbb{A}^n$ — неприводимые замкнутые по Зарискому подмножества. Докажите, что произведение $X \times Y = \{(x, y) \in \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \mid x \in X, y \in Y\}$ — неприводимое замкнутое подмножество $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{m+n}$.

Упражнение 2.20. Пусть $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Множество $X \subset \mathbb{A}^n$ решений уравнения $f = 0$ называется *гиперповерхностью*. Выясните, когда X неприводимо.

Каждому замкнутому по Зарискому подмножеству $X \subset \mathbb{A}^n$ можно сопоставить идеал $I_X \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на X. Обратно, каждому идеалу $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ можно сопоставить множество точек $X_I \subset \mathbb{A}^n$, в которых обращаются в нуль все многочлены $f \in I$. При этом ясно, что $I \subset I_{X_I}$. Если бы мы не предположили, что поле k алгебраически замкнуто, то нетривиальным идеалам I могли бы соответствовать пустые подмножества $\mathbb{A}^n$ (например, при $k = \mathbb{R}$ уравнение $x^2 + 1 = 0$ задаёт пустое подмножество $\mathbb{A}^1$). Для алгебраически замкнутого поля это невозможно.

Упражнение 2.21. Вспомните теорему Гильберта о нулях из третьего листка за осенний семестр прошлого года, из которой следует приведённое выше утверждение.

Упражнение 2.22. Вспомните понятие радикального идеала, введённое в третьем листке за осенний семестр прошлого года и теорему 3.9 из этого листка, из которой следует, что

Соответствия $X \mapsto I_X$ и $I \mapsto X_I$ определяют взаимно однозначное соответствие между замкнутыми по Зарискому подмножествами $\mathbb{A}^n$ и радикальными идеалами в $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Упражнение 2.23. Пусть $X, Y \subset \mathbb{A}^2$ — плоские кривые такие, что $I_X = (x^2+y^2-1)$ (коника) и $I_Y = (y+1)$ (прямая). Найдите идеал $I_{X\cap Y}$. Верно ли, что $I_{X\cap Y} = (x^2+y^2-1, y+1)$ и почему?

Задача 2.24. Докажите, что замкнутое по Зарискому подмножество $X \subset \mathbb{A}^n$ неприводимо тогда и только тогда, когда соответствующий идеал I_X прост (см. определение 2.1 из листка 2 за первый семестр прошлого года).

Определение 2.4. Функция f на аффинном алгебраическом многообразии $X \subset \mathbb{A}^n$ называется *регулярной*, если $f = F\big|_X$, где $F \in k[X_1, \dots, X_n]$. Множество регулярных на X функций образует кольцо (точнее — k-алгебру; докажите!), называемое *координатным кольцом* и обозначаемое $k[X]$.

Упражнение 2.25. Удостоверьтесь, что $k[X] = k[X_1, \dots, X_n]/I_X$.

Задача 2.26. Опишите алгебру $k[X \times Y]$ в терминах алгебр $k[X]$ и $k[Y]$.

Упражнение 2.27. Для каких алгебраических многообразий координатное кольцо конечномерно над полем k?

Определение 2.5. Пусть $X \subset \mathbb{A}^m$, $Y \subset \mathbb{A}^n$ — аффинные алгебраические многообразия, $f\colon X \to Y$ — отображение. Говорят, что f — *морфизм*, или it регулярное отображение, если существуют регулярные функции $f_1, \dots, f_n \in k[X]$ такие, что $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ для всех точек $x \in X$.

Подмногообразие $X_y = f^{-1}(y) \subset X$ называется *слоем* морфизма f над точкой $y \in Y$.

Морфизм $f\colon X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g\colon Y \to X$ такой, что $g \circ f$ и $f \circ g$ — тождественные отображения X и Y соответственно.

Изоморфизм $f\colon X \to X$ называется *автоморфизмом.*

Аффинные многообразия $X \subset \mathbb{A}^m$ и $Y \subset \mathbb{A}^n$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f\colon X \to Y$.

Если $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение топологических пространств, а u — произвольная функция на Y. Соотношение $f^*(u)(x) = u(f(x))$ определяет функцию $f^*(u)$ на X. Таким образом, отображению f отвечает гомоморфизм алгебр f^* алгебры функций на Y в алгебру функций на X.

Упражнение 2.28. Проверьте, что f^* переводит непрерывные функции на Y в непрерывные функции на X.

Пусть теперь X и Y — аффинные алгебраические многообразия.

Упражнение 2.29. Докажите, что f является морфизмом тогда и только тогда, когда $f^*(k[Y]) \subset k[X]$, т.е. f^* переводит регулярные функции на Y в регулярные функции на X.

Упражнение 2.30. Обратно, пусть φ — произвольный гомоморфизм k-алгебры $k[Y]$ в k-алгебру $k[X]$. Докажите, что φ индуцируется некоторым морфизмом, т.е. существует морфизм $f\colon X \to Y$ такой, что $\varphi = f^*$.

Примеры.

(1) Тождественное отображение $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ очевидно является морфизмом.

(2) Регулярная функция $f \in k[X]$ определяет морфизм $f\colon X \to \mathbb{A}^1$. Например, функция $\det$ определяет морфизм n^2-мерного аффинного пространства всех квадратных матриц порядка n в аффинную прямую.

(3) Аналогично, рассмотрим аффинное алгебраическое многообразие X, образованное матрицами порядка $m \times n$, ранг которых не превосходит r (докажите, что это действительно алгебраическое многообразие!), и пусть $f\colon X \to \mathbb{A}^{\binom{m}{r}\binom{n}{r}}$ — отображение, задаваемое всеми минорами матрицы порядка r. Тогда f — регулярное отображение.

(4) Пусть $m > n$. Регулярное отображение $p\colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$, $p(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$, а также его ограничение на аффинное многообразие $X \subset \mathbb{A}^m$ называются *проектированием.* Если X и Y — аффинные многообразия, то отображение $p\colon X \times Y \to X$, $p(x, y) = x$ также называется проектированием; это определение — частный случай предыдущего.

(5) Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие, и пусть $v_m\colon X \to \mathbb{A}^{d_{n,m}}$ — морфизм, задаваемый всеми многочленами из $k[T_1, \dots, T_n]$, степень которых не превосходит m (этот морфизм называется *отображением Веронезе*). Подсчитайте число $d_{n,m}$. Является ли $Y = v_m(X)$ аффинным алгебраическим многообразием. Если ответ на предыдущий вопрос положителен, то найдите уравнения Y, выясните, является ли отображение $v_m\colon X \to Y$ изоморфизмом и если да, то найдите обратное отображение.

(6) Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, и пусть G — конечная группа автоморфизмов X. Иными словами, каждому элементу $g \in G$ соответствует автоморфизм $\sigma_g\colon X \to X$, причём $\sigma_1 = \mathrm{Id}_X$ и $\sigma_{g_1 g_2} = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ при $g_1, g_2 \in G$. Предположим, что $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$. Тогда k-алгебра $k[X]^G$ функций из $k[X]$, инвариантных относительно действия G, конечно порождена (докажите это; ср. теорему 3.8 из листка 3 за первый семестр прошлого года). Поэтому из упражнения 2.22 следует, что существуют аффинное многообразие Y и морфизм $f\colon X \to Y$ такие, что $k[Y] \simeq k[X]^G$ и $f^*(k[Y]) = k[X]^G$. Многообразие Y называется *фактормногообразием X по действию группы G* и обозначается X/G. Слои канонического морфизма $f\colon X \to X/G$ называются *орбитами* действия G на X; таким образом, точки $x_1, x_2 \in X$ принадлежат одной орбите если и только если $x_2 = gx_1$ для некоторого $g \in G$.

(7) Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное алгебраическое многообразие над полем характеристики p, уравнения которого принадлежат $\mathbb{F}_p[T_1, \dots, T_n]$, где p — простое число, а $\mathbb{F}_p$ — поле из p элементов. Пусть $f\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^p, \dots, x_n^p)$, и пусть $f_X = f\mid_X$. Проверьте, что $f_X\colon X \to X$. Отображение f называется *морфизмом Фробениуса.* Важность этого отображения для арифметики объясняется тем, что точки X с координатами в $\mathbb{F}_p$ — это в точности неподвижные точки f. Аналогично, точки X с координатами в $\mathbb{F}_q$, $q = p^t$ — это в точности неподвижные точки морфизма $f^t = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{t}$.

Упражнение 2.31. Докажите все утверждения в приведённых выше примерах.

Упражнение 2.32. Докажите, что гипербола, заданная уравнением $xy-1=0$, не изоморфна аффинной прямой $\mathbb{A}^1$. Гомеоморфна ли гипербола прямой в обычной (комплексной) топологии?

Задача 2.33. Докажите, что полукубическая парабола, заданная уравнением $y^2-x^3=0$, не изоморфна аффинной прямой $\mathbb{A}^1$, но гомеоморфна $\mathbb{A}^1$ в обычной (комплексной) топологии.

Задача 2.34. Ниже перечислены уравнения плоских кривых. Какие из этих кривых изоморфны друг другу?

а) $x^2+y^2-1=0$;
б) $x^2-y^2-1=0$;
в) $xy-1=0$;
г) $x^3+y^3-1=0$;
д) $x^3-y^3-1=0$.

Задача 2.35. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие над алгебраически замкнутым полем k, $\operatorname{char} k = p$, заданное системой уравнений, коэффициенты которых лежат в поле $\mathbb{F}_p$, где p — простое число, а $\mathbb{F}_p \subset k$ — поле из p элементов, и пусть $\varphi\colon X \to X$ — морфизм Фробениуса. Является ли φ

а) изоморфизмом;
б) взаимно однозначным отображением?

Задача 2.36. Группа $G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ действует на плоскости $\mathbb{A}^2$ по формуле

а) $\sigma(x,y)=(-x,y)$;
б) $\sigma(x,y)=(-x,-y)$,

где σ — образующая G. Найдите орбиты точек $\mathbb{A}^2$ относительно этого действия и фактормногообразие $\mathbb{A}^2/G$.

Определение 2.6. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, и пусть n — натуральное число. Группа S_n перестановок из n элементов очевидным образом действует на $\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n}$. Фактормногообразие $\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n}/S_n$ обозначается $X^{(n)}$ и называется *n-ой симметрической степенью* многообразия X.

Таким образом, $X^{(n)}$ параметризует наборы из n точек X.

Упражнение 2.37. Найдите орбиты различных точек $\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n}$ относительно действия S_n.

Задача 2.38. Найдите n-ую симметрическую степень аффинной прямой $\mathbb{A}^1$.

Определение 2.7. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие. Открытое подмножество $U \subset X$ называется *главным*, если $U = U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, где $f \in k[X]$ — регулярная функция.

Напомним, что система открытых множеств $\{U_\alpha\}$, $U_\alpha \subset X$ образует *базу* открытых множеств топологического пространства X, если всякое открытое множество $U \subset X$ является объединением открытых множеств U_α.

Упражнение 2.39. Докажите, что главные открытые подмножества образуют базу открытых множеств в топологии Зариского алгебраического многообразия X (при этом, в силу нётеровости, каждое открытое подмножество X является объединение конечного числа главных).