АЛГЕБРА 2000/2001
I СЕМЕСТР

. , . , . , . , .

Листок 3

Упражнение 3.1. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

а) X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие;
б) Координатное кольцо $k[X]$ является областью целостности.

Определение 3.1. Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие. Поле частных координатного кольца $k[X]$ обозначается $k(X)$ и называется *полем рациональных функций* на многообразии X.

Задача 3.2. Пусть $X \subset \mathbb{A}^2$ — полукубическая парабола, заданная уравнением $y^2 - x^3 = 0$. Докажите, что каждая рациональная функция на X однозначно представляется в виде $\varphi(x) + \psi(x) \cdot y$, где $\varphi(x), \psi(x) \in k(x)$. Какие из этих функций регулярны на X?

Заметим, что рациональная функция не является функцией в обычном смысле слова, поскольку она не всюду определена. Следующее определение позволяет охарактеризовать множество точек, в которых функция определена (т.е. принимает определённое значение).

Определение 3.2. Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, пусть $x \in X$, и пусть $\varphi \in k(X)$ — рациональная функция. Функция φ называется *регулярной* в точке x, если $\varphi = \frac{f}{g}$, где $f, g \in k[X]$ и $g(x) \neq 0$.

Множество рациональных функций, регулярных в точке $x \in X$, называется *локальным кольцом* X в точке x и обозначается $\mathcal{O}_{X,x}$ или просто $\mathcal{O}_x$.

Функция $\varphi \in k(X)$ называется *регулярной на подмножестве* $U \subset X$, если она регулярна в каждой точке $x \in U$.

Множество точек, в которых φ регулярна, называется *областью определения* φ.

Упражнение 3.3. Докажите, что область определения рациональной функции φ непуста и открыта.

Задача 3.4. Докажите, что рациональная функция $\frac{y}{x}$ нерегулярна в точке с координатами $(0,0)$ на полукубической параболе, заданной уравнением $y^2 - x^3 = 0$, и декартовом листе, заданном уравнением $y^2 - x^2 - x^3 = 0$ в $\mathbb{A}^2$.

Задача 3.5. Найдите кольцо функций, регулярных на дополнении к началу координат в аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

Задача 3.6. Найдите область определения функции $\frac{z}{x}$ на квадратичном конусе X, заданном уравнением $z^2 - xy = 0$ в $\mathbb{A}^3$. Интерпретируйте результат с помощью задачи 2.36 б).

Задача 3.7. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, и пусть $\varphi \in k(X)$ — рациональная функция, регулярная во всех точках X (т.е. область определения φ совпадает со всем X). Докажите, что $\varphi \in k[X]$.

Определение 3.3. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие. Открытое подмножество $U \subset X$ называется *главным*, если $U = U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, где $f \in k[X]$ — регулярная функция.

Задача 3.8. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм аффинных алгебраических многообразий, и пусть $V \subset Y$ — главное открытое подмножество. Докажите, что $U = f^{-1}(V)$ — главное открытое подмножество X.

Напомним, что система открытых множеств $\{U_\alpha\}$, $U_\alpha \subset X$ образует *базу* открытых множеств топологического пространства X, если всякое открытое множество $U \subset X$ является объединением открытых множеств U_α.

Упражнение 3.9. Докажите, что главные открытые подмножества образуют базу открытых множеств в топологии Зариского алгебраического многообразия X (при этом, в силу нётеровости, каждое открытое подмножество X является объединение конечного числа главных).

Задача 3.10. Докажите, что главное открытое подмножество U_f аффинного многообразия X само изоморфно аффинному многообразию.

Задача 3.11. Пусть X — аффинное многообразие с координатной алгеброй $k[X]$. Найдите алгебру рациональных функций, регулярных на главном аффинном множестве U_f. Проверьте, что эта алгебра изоморфна координатной алгебре многообразия, построенного в предыдущей задаче.

Определение 3.4. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие. *Рациональное отображение* $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{A}^n$ задаётся набором рациональных функций $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\varphi_i \in k(X)$, $i = 1, \dots, n$.

Говорят, что отображение φ *регулярно* в точке $x \in X$, если $\varphi_i \in \mathcal{O}_x$, $i = 1, \dots, n$; в этом случае точка $\varphi(x)$ называется *образом* точки x.

Если $Y \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие и $\varphi(x) \in Y$ для всех точек $x \in X$, в которых φ регулярно, то φ называется *рациональным отображением X в Y*.

Задача 3.12. Докажите, что рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ можно также определить как класс эквивалентности пар (U, φ_U), где $U \subset X$ — плотное открытое по Зарискому подмножество, а $\varphi_U\colon U \to Y$ — регулярное отображение, причём $(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V)$, если $\varphi_U\big|_{U\cap V} = \varphi_V\big|_{U\cap V}$.

Задача 3.13. Пусть X и Y — аффинные алгебраические многообразия, и пусть $V \subset X$ и $W \subset Y$ — плотные открытые подмножества. Обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$ (соотв. $\mathcal{R}(V, Y)$, соотв. $\mathcal{R}(X, W)$) множество рациональных отображений их X в Y (соотв. из V в Y, соотв. из X в W). Докажите, что естественные отображения $\mathcal{R}(X, Y) \to \mathcal{R}(V, Y)$ и $\mathcal{R}(X, W) \to \mathcal{R}(X, Y)$ инъективны. Найдите их образы.

Пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение аффинных многообразий такое, что $\overline{\varphi(X)} = Y$, т.е. $\varphi(X)$ плотно в Y (такие отображения называются *доминантными*). Докажите, что φ естественно определяет расширение полей рациональных функций $\varphi^*\colon k(Y) \hookrightarrow k(X)$.

Определение 3.5. Пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение. Доминантное отображение φ называется *бирациональным*, если существует доминантное рациональное отображение $\psi\colon Y \dashrightarrow X$ такое, что $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$ (как рациональные отображения). В этом случае многообразия X и Y называются *бирационально изоморфными.*

Аффинные многообразия, изоморфные аффинному пространству $\mathbb{A}^n$, называются *рациональными.*

Задача 3.14. Предположим, что $\operatorname{char} k \neq 2$. Докажите, что неприводимая квадрика в $\mathbb{A}^n$, заданная уравнением $x_1^2 + \cdots + x_r^2 - 1 = 0$, где $1 \leq r \leq n$, рациональна, но не изоморфна $\mathbb{A}^i$ ни при каком i.

Задача 3.15. Предположим, что $\operatorname{char} k \neq 3$. Докажите, что неприводимая кубика в $\mathbb{A}^3$, заданная уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, рациональна (бирационально изоморфна $\mathbb{A}^2$), но не изоморфна $\mathbb{A}^2$. Интерпретируйте соответствующее отображение $X \dashrightarrow \mathbb{A}^2$.

Задача 3.16. Докажите, что отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{A}^1$, $\varphi(x,y) = \frac{y}{x}$, где X — полукубическая парабола или декартов лист (см. задачу 2.42), является бирациональным, но не регулярным отображением. Интерпретируйте это отображение геометрически. Задайте формулами отображение φ^{-1} и проверьте, является ли оно регулярным.

Задача 3.17. Докажите, что существуют неприводимые плоские рациональные кривые произвольной степени.

Задача 3.18. При каких натуральных a рациональна плоская кривая, заданная уравнением $x^a + y^a - 1 = 0$?

Задача 3.19. Пусть X и Y — аффинные алгебраические многообразия. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

а) X и Y бирационально изоморфны;
б) $k(X) \simeq k(Y)$;
в) Существуют непустые открытые подмножества $U \subset X$ и $V \subset Y$, изоморфные друг другу.

Предыдущие задачи показывают, что далеко не все многообразия рациональны. Тем не менее, все многообразия бирационально изоморфны гиперповерхностям.

Задача 3.20. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие. Докажите, что существует проектирование $\pi\colon X \dashrightarrow \mathbb{A}^m$ такое, что $Y = \pi(X)$ гиперповерхность (см. упражнение 2.20) и $\pi\colon X \dashrightarrow Y$ бирациональный изоморфизм. В частности, произвольное аффинное многообразие бирационально изоморфно гиперповерхности.

Указание. Воспользуйтесь теоремой о примитивном элементе (задача 4.7 за осенний семестр 1999 года). Почему это можно сделать?

Пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение, и пусть $U \subset X$ — плотное открытое подмножество, на котором φ регулярно. Положим $\Gamma_\varphi = \overline{\Gamma_\varphi^U}$, где $\Gamma_\varphi^U = \{(x,y) \mid x \in U, y = \varphi(x)\}$, а черта обозначает замыкание в топологии Зариского. Пусть $p\colon X \times Y \to X$ и $q\colon X \times Y \to Y$ — проекции. Подмногообразие Γ_φ^U (соотв. Γ_φ) называется *графиком* регулярного отображения $\varphi_U = \varphi\big|_U$ (соотв. рационального отображения φ).

Задача 3.21. Докажите, что Γ_φ^U — замкнутое подмногообразие $U \times Y$, причём $p_\Gamma^U = p\big|_{\Gamma_\varphi^U}$ (соотв. $p_\Gamma = p\big|_{\Gamma_\varphi}$) — изоморфизм (соотв. бирациональный изоморфизм), $\varphi\big|_U = q \circ (p_\Gamma^U)^{-1}$, $\varphi = q \circ (p_\Gamma)^{-1}$. Таким образом, каждый морфизм (соотв. каждое бирациональное отображение) аффинных алгебраических многообразий является композицией проектирования и изоморфизма (соотв. бирационального изоморфизма).

Естественным обобщением бирациональных отображений являются *отображения конечной степени.*

Задача 3.22. Пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ — доминантное рациональное отображение неприводимых аффинных многообразий. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

а) Расширение полей рациональных функций $k(X) : k(Y)$ — конечное алгебраическое расширение степени d ($[k(X) : k(Y)] = d$);

б) Существует плотное открытое по Зарискому подмножество $V \subset Y$ такое, что при $y \in V$ слой $\varphi^{-1}(y)$ состоит из конечного числа точек r.

При этом $r \leq d$, а если $\operatorname{char} k = 0$, то $r = d$.

Определение 3.6. Число d в задаче 3.22 называется *степенью* рационального отображения φ и обозначается $\deg \varphi$.

В частности, бирациональные отображения — это отображения степени один.

Упражнение 3.23. Вычислите степень композиции двух рациональных отображений.

Задача 3.23. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — гиперповерхность, заданная уравнением степени d, и пусть $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ — общее проектирование (т.е. проектирование относительно общей системы координат; здесь и далее «общий» означает принадлежащий некоторому плотному открытому по Зарискому подмножеству). Докажите, что $\deg \pi\big|_X = d$.

Задача 3.24. Пусть $X \subset \mathbb{A}^2$ — полукубическая парабола или декартов лист, а $\pi_z\colon X \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ — проектирование из точки $z \in \mathbb{A}^2$. Вычислите степень π_z в следующих трёх случаях:

а) $z \notin X$;

б) $z \in (X \setminus o)$, где o — начало координат;

в) $z = o$.

Задача 3.25. Пусть X — аффинное многообразие, а G — конечная группа, действующая на X, причём $\operatorname{char} k \not| \, |G|$. Найдите степень канонического морфизма $X \to X/G$.

Задача 3.26. Найдите степень морфизма Фробениуса из примера (7) в листке 2.

Упражнение 3.27. Пусть X, Y — неприводимые плоские аффинные алгебраические кривые, и пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение. Докажите, что либо $\varphi(X)$ — точка, либо φ доминантно и существует натуральное число d такое, что все слои φ состоят не более, чем из d точек и почти все — ровно из d точек. Чему равно число d?

Традиционно рациональное многообразие X понималось как многообразие, параметризованное аффинным пространством $\mathbb{A}^n$, так что почти всем (т.е. всем, за исключением замкнутого по Зарискому множества) значениям параметров $t_1, \dots, t_n$ сопоставлена точка $\varphi(t_1, \dots, t_n) \in X$. Мы видели (см. напр. задачу 3.18), что далеко не для всех многообразий существует такая рациональная параметризация. Если она всё же существует и вдобавок задана функциями, определёнными над полем $\mathbb{Q}$, то в качестве следствия мы получаем общий вид решений некоторых систем диофантовых уравнений.

Задача 3.28. Найдите общий вид целочисленных решений следующих уравнений от трёх неизвестных x, y, z:

а) $x^2 + y^2 = z^2$;
б) $x^3 = y^2 z$;
в) $x^3 + x^2 z = y^2 z$.

По сути, для существования указанной выше параметризации не обязательно, чтобы многообразие X было рационально, достаточно, чтобы существовало доминантное отображение $\varphi\colon \mathbb{A}^n \dashrightarrow X$.

Определение 3.7. Аффинное многообразие X называется *унирациональным*, если существует доминантное рациональное отображение $\varphi\colon \mathbb{A}^n \dashrightarrow X$.

Разумеется, всякое рациональное многообразие унирационально. Долгое время существовала гипотеза, что верно и обратное, т.е. если существует рациональное отображение $\varphi\colon \mathbb{A}^n \dashrightarrow X$ степени $d > 0$, то существует и бирациональное отображение $\psi\colon \mathbb{A}^n \dashrightarrow X$ (другими словами, если существует рациональная параметризация, то некоторая другая рациональная параметризация почти всюду взаимно однозначна). Эта гипотеза была довольно давно доказана для кривых и поверхностей, но сравнительно недавно выяснилось, что она неверна уже для некоторых кубических гиперповерхностей в $\mathbb{A}^4$.

Задача 3.29 (Теорема Люрота). Пусть $\varphi\colon \mathbb{A}^1 \dashrightarrow C$ — доминантное отображение. Тогда C бирационально изоморфно $\mathbb{A}^1$. Другими словами, если $k \subset k(C) \subset k(T)$, то $k(C) = k(u)$, где $u \in k(C)$ — некоторая рациональная функция.

Определение 3.8. Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие. Степень трансцендентности $\operatorname{tr}(k(X)/k)$ (см. листок 4 за прошлый год) называется *размерностью* многообразия X и обозначается $\dim X$.

Таким образом, по определению, $\dim X$ является бирациональным инвариантом многообразия X.

Размерностью приводимого многообразия называется максимум размерностей его неприводимых компонент.

Многообразия, для которых $\dim X = 1$, называются *кривыми*, а многообразия с $\dim X = 2$ — *поверхностями*.

Задача 3.30. Докажите, что:

а) $\dim \mathbb{A}^n = n$;
б) Многообразие X состоит из конечного числа точек тогда и только тогда, когда $\dim X = 0$;
в) $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

Задача 3.31.

а) Пусть Y — замкнутое подмногообразие аффинного многообразия X. Тогда $\dim Y \leq \dim X$;
б) Если, в условиях а), Y неприводимо и $\dim Y = \dim X$, то Y — неприводимая компонента X.

Задача 3.32. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — гиперповерхность. Докажите, что $\dim X = n - 1$. Более того, все неприводимые компоненты X имеют размерность $n - 1$.

Задача 3.33. Обратно, пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие, все компоненты которого имеют коразмерность один (если $Y \subset Z$ — неприводимые алгебраические многообразия, то *коразмерностью* Y в Z называется разность $\operatorname{codim}_Z Y = \dim Z - \dim Y$). Докажите, что X гиперповерхность (т.е. задаётся одним уравнением).

Задача 3.32 допускает следующее обобщение.

Задача 3.34. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, пусть $f \in k[X]$, и пусть $Y \subset X$ — подмногообразие, заданное уравнением $f = 0$. Докажите, что либо $Y = \varnothing$, либо все компоненты Y имеют в X коразмерность один.

Упражнение 3.35. Справедливо ли утверждение задачи 3.33 для произвольных неприводимых аффинных многообразий? Точнее говоря, если $Z \subset \mathbb{A}^n$ — неприводимое аффинное многообразие, а $X \subset Z$ — подмногообразие коразмерности один, то верно ли, что X задаётся в Z одним уравнением (т.е. что $X = Z \cap H$, где $H \subset \mathbb{A}^n$ гиперповерхность).

Задача 3.36. Пусть $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ — аффинные многообразия, и пусть $Z \neq \varnothing$ — неприводимая компонента $X \cap Y$. Докажите, что $\dim Z \geq \dim X + \dim Y - n$.

Задача 3.37. Остаётся ли справедливым утверждение задачи 3.36, если заменить $\mathbb{A}^n$ на произвольное неприводимое n-мерное аффинное многообразие?

Задача 3.38. Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

а) $\dim X = n$;
б) Существует цепочка вложенных друг в друга неприводимых многообразий $X \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_n$ и не существует более длинной цепочки с этими свойствами.

Сформулируйте условие б) в терминах цепочек идеалов координатного кольца многообразия X.

Упражнение 3.39. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — доминантное рациональное отображение неприводимых многообразий. Докажите, что $\dim Y \le \dim X$. Более того, $\dim Y = \dim X$ тогда и только тогда, когда общий слой φ конечен.

Задача 3.40 (Теорема о размерности слоёв). Пусть $f\colon X \to Y$ — сюръективный морфизм аффинных многообразий, $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Докажите, что для всех $y \in Y$ имеем $\dim f^{-1}(y) \ge n - m$ и для почти всех $y \in Y$ (т.е. для всех y из всюду плотного открытого по Зарискому подмножества Y) $\dim f^{-1}(y) = n - m$.

Задача 3.41. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное алгебраическое многообразие, и пусть $z \notin X$ — точка. Обозначим через $C_z X$ объединение прямых, соединяющих z с точками X. Когда $C_z X$ (оно называемое конусом с вершиной z и основанием X) является неприводимым аффинным многообразием? Какова размерность этого многообразия?

Задача 3.42. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие, состоящее из конечного числа точек. Найдите минимальное число уравнений, задающих X в $\mathbb{A}^n$.

Задача 3.43. Пусть $X \subset \mathbb{A}^3$ — кривая. Найдите минимальное число уравнений, задающих X в $\mathbb{A}^3$ (теоретико-множественно).

Перейдём к изучению касательных аффинных многообразий. Пусть $X \subset \mathbb{A}^N$ — аффинное алгебраическое многообразие, пусть $x \in X$ — точка, и пусть $l = \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^N$ — прямая, проходящая через x. Пусть $T_1, \dots, T_N$ — координаты в $\mathbb{A}^N$, и пусть $I = I_X \subset k[T_1, \dots, T_N]$ — идеал, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на X. Нетрудно видеть, что если T — координата на l, относительно которой точка $x \in l$ является началом координат, то множество ограничений многочленов из I_X на l образует идеал $J = J_X \subset k[T]$. Для произвольного многочлена $F(T) = \sum_i a_i T^i \in k[T]$ положим $\nu_x(l, F) = \min\{i \mid a_i \ne 0\}$ (для $F = 0$ положим $\nu_x(l, F) = \infty$), $\nu_x(l) = \min\{\nu_x(l, F) \mid F \in J_X\}$. Из наших предположений вытекает, что $\nu_x(l) \ge 1$.

Определение 3.9. Число $\nu_x(l)$ называется *кратностью пересечения* прямой l с многообразием X в точке x. Говорят, что прямая l *касается* многообразия X в точке x (соотв. пересекается с X в x *трансверсально*), если $\nu_x(l) \ge 2$ (соотв. $\nu_x(l) = 1$). В частности, если $l \subset X$, то l касается X во всех точках $x \in l$.

Задача 3.44. Докажите, что объединение прямых, касающихся многообразия X в точке $x \in X$, является линейным пространством.

Определение 3.10. Линейное пространство, о котором идёт речь в предыдущей задаче, называется (аффинным) *касательным пространством* к многообразию X в точке x и обозначается $T_{X,x}$.

Задача 3.45. Пусть $X^n \subset \mathbb{A}^N$ — неприводимое аффинное n-мерное алгебраическое многообразие. Докажите, что существует плотное открытое по Зарискому подмножество $\operatorname{Sm} X \subset X$ такое, что при $x \in \operatorname{Sm} X$ $\dim T_{X,x} = n$, а при $x \in \operatorname{Sing} X = X \setminus \operatorname{Sm} X$ $\dim T_{X,x} > n$.

Определение 3.11. В условиях задачи 3.45, точки из $\operatorname{Sm} X$ называются *простыми* или *неособыми*, а точки из $\operatorname{Sing} X$ — *особыми* точками многообразия X. Многообразие X, для которого $\operatorname{Sm} X = X$, называется *неособым* или *гладким*.

Задача 3.46. Дайте определение простых и особых точек для приводимого многообразия.

Задача 3.47. Пусть $X^n \subset \mathbb{A}^N$ — аффинное алгебраическое многообразие, задающееся уравнениями $F_i(T_1, \ldots, T_N) = 0$. Найдите уравнения замкнутого подмногообразия $\operatorname{Sing} X$.

Задача 3.48. Докажите, что функция $x \mapsto \dim T_{X,x}$ полунепрерывна сверху на многообразии X.

Задача 3.49. Найдите касательные пространства в точках конуса $C_z X$ с вершиной z и основанием $X \subset \mathbb{A}^N$. Опишите простые и особые точки этого конуса.

Задача 3.50. Известно, что точка $(x, y) \in X \times Y$ неособа. Что можно сказать о точках $x \in X$ и $y \in Y$?

Задача 3.51. Пусть $X = \cup X_i$ — разложение многообразия X на неприводимые компоненты, касательные пространства к которым во всех точках предполагаются известными. Найдите касательные пространство к X в произвольной точке $x \in X$.

Упражнение 3.52. Найдите все гиперповерхности второго порядка (квадрики), имеющие особые точки. Как устроено их множество особенностей?

Упражнение 3.53. Пусть $X \subset \mathbb{A}^N$ — гиперповерхность, задаваемая уравнением степени d. Докажите, что всякая прямая, пересекающая X в $d+1$ точке ($(d+1)$-секущая), лежит на X.

Задача 3.54. Сколько особых точек может иметь плоская аффинная кривая, задающаяся уравнением третьей степени? Постарайтесь классифицировать все такие кривые, имеющие особенности. Все ли из них рациональны?

Задача 3.55. Пусть $X \subset \mathbb{A}^N$ — аффинное многообразие, $x \in X$, пусть $f \in k[X]$ — регулярная функция, и пусть $F \in k[T_1, \ldots, T_N]$ — многочлен, ограничение которого на X совпадает с f. Положим $d_x f = d_x F\big|_{T_{X,x}}$. Докажите, что полученная линейная функция на $T_{X,x}$ не зависит от выбора F. Она называется *дифференциалом* регулярной функции f.

Задача 3.56. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, и пусть $M_x \subset k[X]$ — идеал функций, обращающихся в нуль в точке x. докажите, что M_x — максимальный идеал и что отображение $d_x \colon M_x \to T^*_{X,x}$ определяет изоморфизм линейных пространств M_x/M_x^2 и $T^*_{X,x}$. Таким образом, $T_{X,x} \simeq (M_x/M_x^2)^*$.

Задача 3.57. В условиях предыдущей задачи докажите, что $T_{X,x} \simeq (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$, где $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ — максимальный идеал локального кольца точки x, образованный регулярными функциями, обращающимися в нуль в точке x. Линейное пространство $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ называется *касательным пространством Зариского*.

Упражнение 3.58. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм аффинных алгебраических многообразий, $x \in X$, $y = f(x)$. Проверьте, что гомоморфизм $f^*\colon k[Y] \to k[X]$ индуцирует линейное отображение $\mathfrak{m}_y frakm_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и соответствующее линейное отображение $d_xf\colon T_{X,x} \to T_{X,y}$ касательных пространств Зариского. Отображение d_xf называется *дифференциалом* отображения f в точке x. Докажите, что если $g\colon Y \to Z$ — другой морфизм, $z = g(y)$, а $h = g \circ f$, то $d_xh = d_yg \circ d_xf\colon T_{X,x} \to T_{Z,z}$.

Задача 3.59. Приведите пример (особой) аффинной кривой $C \subset \mathbb{A}^N$, не изоморфной никакой аффинной кривой, лежащей в аффинном пространстве меньшей размерности.

В геометрии чаще всего касательные прямые определяют как пределы секущих. Такой подход применим и к алгебраическим многообразиям.

Пусть $X^n \subset \mathbb{A}^N$ — аффинное алгебраическое многообразие, и пусть $x \in X$. Положим $W \subset X \times \mathbb{A}^N$, $W = \{(y,z) \mid y \neq x, z \in \langle x,y\rangle\}$, где $\langle x,y\rangle \subset \mathbb{A}^N$ — прямая, проходящая через точки x и y, и пусть $\overline{W}$ — замыкание W в $X \times \mathbb{A}^N$. Обозначим через p и π проектирование $\overline{W}$ на X и $\mathbb{A}^N$ соответственно.

Задача 3.60. Проверьте, что $\overline{W}$ и $\pi(\overline{W})$ — аффинные многообразия размерности $n+1$, а $C_{X,x} = \pi(p^{-1}(\overline{W}))$ — n-мерный конус в $\mathbb{A}^N$ с вершиной в точке x.

Определение 3.12. Конус $C_{X,x}$ называется *касательным конусом* к многообразию X в точке $x \in X$.

Говоря наглядно, касательный конус заметается пределами секущих многообразия X, один конец которых закреплён вы точке x, а второй стремится к x.

Упражнение 3.61. Докажите, что $C_{X,x} \subset T_{X,x}$, т.е. касательный конус содержится в касательном пространстве.

Задача 3.62. Пусть $X \subset \mathbb{A}^N$ — аффинное многообразие, $x \in X$, причём система координат в $\mathbb{A}^N$ выбрана так, что точка x совпадает с началом координат. Предположим, что идеал X порождается многочленами $F_1, \ldots, F_r$. Докажите, что идеал $C_{X,x}$ порождается начальными формами многочленов F_i (напомним, что если $F = \sum_{j=k}^m F_j$, где F_j — форма (однородный многочлен) степени j, а $F_k \neq 0$, то F_k называется начальной формой многочлена F).

Упражнение 3.63. Докажите, что если $x \in X$ — неособая точка, то $C_{X,x} = T_{X,x}$.

Упражнение 3.64. Докажите, что для плоской кривой касательный конус в любой точке является объединением прямых (с кратностями). Найдите касательный конус в начале координат к полукубической параболе и декартову листу.

Задача 3.65. Докажите, что, как и касательное пространство, касательный конус не зависит от вложения в аффинное пространство и хорошо ведёт себя при отображениях. Точнее говоря, пусть $R_x = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}_x^i/\mathfrak{m}_x^{i+1}$. Докажите, что R_x — k-алгебра, порождённая $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, так что существует эпиморфизм $\lambda\colon k[\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2] \to R_x$. Докажите, что касательный конус задаётся в касательном пространстве $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ идеалом $\operatorname{Ker}\lambda$.

Если касательные определять как пределы секущих, оба конца клоторых свободны, то мы придём к определению касательной звезды.

Пусть $X^n \subset \mathbb{A}^N$ — аффинное алгебраическое многообразие, и пусть $x \in X$. Положим $W \subset X \times X \times \mathbb{A}^N$, $W = \{(y_1, y_2, z) \mid y_1 \neq y_2, z \in \langle y_1, y_2 \rangle\}$, и пусть $\overline{W}$ — замыкание W в $X \times X \times \mathbb{A}^N$. Обозначим через p_{12} и π проектирование $\overline{W}$ на $X \times X$ и $\mathbb{A}^N$ соответственно.

Задача 3.66. Докажите, что $T'_{X,x} = p_{12}^{-1}(x \times x)$ — конус с вершиной x, причём $C_{X,x} \subset T'_{X,x} \subset T_{X,x}$.

Определение 3.13. Конус $T'_{X,x}$ называется *касательной звездой* к X в точке $x \in X$.

Задача 3.67. Пусть $Y = C_z X$ — конус с вершиной z и основанием X. Найдите $T_{Y,z}$, $T'_{Y,z}$ и $C_{Y,z}$.

Задача 3.68. Докажите, что если $x \in X$ — неособая точка, то $C_{X,x} = T'_{X,x} = T_{X,x}$.

Задача 3.69. Попытайтесь дать инвариантное определение касательной звезды и доказать, что она хорошо ведёт себя при регулярных отображениях.

Задача 3.70. Пусть X — неособое n-мерное аффинное алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{C}$. Докажите, что X является гладким и даже аналитическим многообразием размерности $2n$.

Следующая простая лемма имеет удивительно много применений.

Задача 3.71 (Лемма Накаяма). Пусть $M \neq 0$ — модуль конечного типа над кольцом R, и пусть $I \subset R$ — идеал. Предположим, что $rM \neq 0$ для всякого элемента r вида $r = 1 + u$, $u \in I$. Тогда $IM \neq M$.

Определение 3.14. Пересечение всех максимальных идеалов кольца R называется *радикалом Джекобсона* R.

В частности, если R — локальное кольцо, то радикал Джекобсона совпадает с его (единственным) максимальным идеалом.

Задача 3.72. Пусть R — кольцо, $I \subset R$ — идеал, содержащийся в радикале Джекобсона, и пусть $M \neq 0$ — конечно порождённый R-модуль. Тогда

а) $IM \neq M$;

б) Пусть $m_1, \dots, m_k \in M$, и пусть $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_k \in \overline{M} = M/IM$ — их образы в M/IM. Элементы $m_1, \dots, m_k$ порождают M (как R-модуль) тогда и только тогда, когда $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_k$ порождают $\overline{M}$ (как R-модуль).

Определение 3.15. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, $x \in X$, и пусть $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ — максимальный идеал локального кольца. Функции $t_1, \dots, t_r \in \mathfrak{m}_x$ называются *локальными параметрами* в точке x, если их образы $\overline{t}_1, \dots, \overline{t}_r \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ порождают кокасательное пространство $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Упражнение 3.73. Докажите, что локальные параметры порождают максимальный идеал $\mathfrak{m}_x$ (как модуль над кольцом $\mathcal{O}_x$).

Упражнение 3.74. Пусть $R \subset R'$ — конечное расширение колец (т/е. R' — модуль конечного типа над R), и пусть $I \subsetneq R$ — идеал. Тогда $IR' \neq R'$.

Упражнение 3.75. Пусть R — нётерово кольцо, $I \subset R$ — идеал. Докажите, что $\bigcap_{j=1}^{\infty} I^j = 0$ в следующих случаях:

а) R — область целостности;
б) R — локальное кольцо.

Задача 3.76. Пусть X — алгебраическое многообразие, $x \in X$ — точка, и пусть $t_1, \dots, t_r$ — локальные параметры в точке x. Выберем аффинную окрестность $U \ni x$ такую, что $t_1, \dots, t_r \in k[U]$ и обозначим через X_i подмногообразие U, заданное уравнением $t_i = 0$, $i = 1, \dots, r$. Докажите, что, заменив, если необходимо, U меньшей окрестностью точки x, можно считать, что $\bigcap_{i=1}^{r} X_i = \bigcap_{i=1}^{r} T_{X_i,x} = x$. Проверьте, что если x неособа на X, то $\dim X_i = \dim X - 1$ и x неособа на всех X_i, $i = 1, \dots, r$.

Решение задачи 3.70 показывает, что неособое комплексное алгебраическое многообразие X является аналитическим, так что, в частности, функция, регулярная в точке x, в окрестности этой точки может быть представлена сходящимся рядом (рядом Тэйлора этой функции). Следующие задачи показывают как обстоят дела в общем случае.

Определение 3.16. Пусть X — алгебраическое многообразие, $x \in X$, $f \in \mathcal{O}_x$, пусть $r = \dim T_{X,x}$, и пусть $t_1, \dots, t_r$ — система локальных параметров в x, так что (согласно упражнению 3.73) $t_1\mathcal{O}_x + \cdots t_r\mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_x$. Формальный степенной ряд $F = F_0 + \cdots + F_i + \cdots \in k[[T_1, \dots, T_r]]$ называется *рядом Тэйлора* функции f относительно локальных параметров $t_1, \dots, t_r$, если для всех $j \geq 0$ имеет место включение $f - \sum_{i=0}^{j} F_i \in \mathfrak{m}_x^{j+1}$.

Упражнение 3.77. Пусть X — алгебраическое многообразие, пусть $x \in X$, и пусть $t_1, \dots, t_r$ — система локальных параметров в x. Докажите, что для каждой функции $f \in \mathcal{O}_x$ существует хотя бы один ряд Тэйлора.

Задача 3.78. В условиях предыдущего упражнения докажите, что ряд Тэйлора для функции f единственен тогда и только тогда, когда точка x неособа на X.

Упражнение 3.79. Пусть X — алгебраическое многообразие, пусть $x \in X$ — неособая точка, и пусть $t_1, \dots, t_r$ — система локальных параметров в x. Докажите, что всякая функция $f \in \mathcal{O}_x$ однозначно определяется своим рядом Тэйлора, т.е. гомоморфизм $\mathcal{O}_x \to k[[t_1, \dots, t_r]]$, $f \mapsto F$, корректно определённый в силу предыдущей задачи, является мономорфизмом.

Задача 3.80. Выясните, когда гомоморфизм из предыдущей задачи сюръективен (т.е. является изоморфизмом).

Задача 3.81. Пусть X — алгебраическое многообразие, и пусть $x \in X$ — неособая точка. Докажите, что x содержится в единственной неприводимой компоненте X. В частности, если X неособо, то неприводимые компоненты X не пересекаются между собой.

Упражнение 3.82. Пусть $X = \bigcup_i X_i$ — разложение алгебраического многообразия X на неприводимые компоненты. Докажите, что

$$\operatorname{Sing} X = \bigcup_i \operatorname{Sing} X_i \bigcup_{l \neq m} (X_l \bigcap X_m).$$

Определение 3.17. Пусть X — алгебраическое многообразие, $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие, и пусть $x \in Y \subset X$ — точка. Функции $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_x$ называются *локальными уравнениями* Y в точке x, если существует окрестность $U \subset X$, $U \ni x$ такая, что $f_1, \dots, f_r \in k[U]$ и идеал подмногообразия $Y \cap U$ в $k[U]$ порождается функциями $f_1, \dots, f_r$.

Упражнение 3.83. Докажите, что функции $f_1, \dots, f_r$ тогда и только тогда являются локальными уравнениями подмногообразия Y в точке $x \in Y \subset X$, когда они порождают идеал функций, обращающихся в нуль на Y в локальном кольце $\mathcal{O}_x$.

Задача 3.84. Воспользовавшись задачей 3.79 и однозначностью разложения на множители в кольце формальных степенных рядов $k[[t_1, \dots, t_r]]$, докажите, что разложение на простые множители в локальном кольце неособой точки x алгебраического многообразия X также однозначно (при желании в это можно просто поверить).

Задача 3.85. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи и рассуждая как при решении задачи 3.33, докажите, что в неособой точке $x \in X$ алгебраического многообразия X каждое подмногообразие $Y \subset X$, $Y \ni x$, $\operatorname{codim}_X Y = 1$ задаётся единственным локальным уравнением (определённым с точностью до обратимого элемента кольца $\mathcal{O}_x$).

Задача 3.86. Может ли прямая-образующая конуса $X \subset \mathbb{A}^3$, $X = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ быть задана на X одним локальным уравнением в начале координат?

Задача 3.87. Может ли объединение координатных осей в $\mathbb{A}^3$ быть задано в начале координат двумя локальными уравнениями?

Задача 3.88. Пусть X — алгебраическое многообразие, $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, $x \in Y \subset X$, $x \notin \operatorname{Sing} Y$, $x \notin \operatorname{Sing} X$.

а) Докажите, что существует система локальных параметров $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ таких, что $t_1, \dots, t_m$ индуцируют систему локальных параметров в $\mathcal{O}_{Y,x}$, а $t_{m+1}, \dots, t_n$ образуют систему локальных уравнений Y в X в точке x;

б) Обратно, пусть $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ — система локальных параметров, и пусть $Y \subset U$ — подмногообразие в подходящей аффинной окрестности $U \subset X$, $U \ni x$, определённое уравнениями $t_{m+1} = \dots = t_n = 0$. Докажите, что x — неособая точка Y, а $t_1, \dots, t_m$ индуцируют систему локальных параметров в точке x на Y.