АЛГЕБРА 2000/2001
I СЕМЕСТР

. , . , . , . , .

Листок 4

Для решения последующих задач нужно повторить свойства целых элементов и целых замыканий, которые вы проходили в первом семестре прошлого учебного года.

Определение 4.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — доминантный морфизм аффинных алгебраических многообразий, и пусть $f^*\colon k[Y] \hookrightarrow k[X]$ -соответствующее вложение координатных колец. Морфизм f называется *конечным*, если кольцо $k[X]$ цело над $k[Y]$.

Пример. В задаче 4.18 осеннего семестра прошлого года вы показали, что если G — конечная группа автоморфизмов X, то каноническая проекция $X \to X/G$ (см. пример 6 во втором листке за этот семестр) является конечным морфизмом.

Термин «конечный» имеет два объяснения. Во-первых,

Упражнение 4.1. Кольцо A, имеющее конечный тип над подкольцом B, цело над B тогда и только тогда, когда оно является B-модулем конечного типа.

Во-вторых,

Упражнение 4.2. Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм. Докажите, что все слои f конечны.

Упражнение 4.3. Докажите, что рассмотренные в листке 3 морфизмы аффинной прямой в полукубическую параболу и декартов лист (обратные проектированию из особой точки) конечны.

Заметим, что, согласно задаче 3.22, для *любого* доминантного морфизма $f\colon X \to Y$ одинаковой размерности *общий* слой f состоит не более, чем из $d = [k(X) : k(Y)]$ точек. Однако для морфизмов, не являющихся конечными, специальные слои могут и не быть конечными.

Упражнение 4.4. Приведите пример доминантного морфизма многообразий одинаковой размерности, не все слои которого конечны.

Задача 4.5. Выведите из упражнения 3.74, что конечный морфизм сюръективен.

Упражнение 4.6. Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм аффинных алгебраических многообразий, и пусть $Z \subset X$ — замкнутое подмногообразие. Докажите, что морфизм $f\big|_Z\colon Z \to f(Z)$ также конечен. Выведите отсюда и из предшествующей задачи, что $f(Z)$ замкнуто в Y.

Задача 4.7. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм аффинных алгебраических многообразий, и пусть $Y = \bigcup_i U_i$, где U_i — главные аффинные подмножества, $X_i = f^{-1}(U_i)$, $f_i = f\big|_{X_i}$. Докажите, что f конечен тогда и только тогда, когда при всех i конечны морфизмы $f_i\colon X_i \to U_i$.

Задача 4.8. Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольный доминантный морфизм аффинных многообразий. Докажите, что образ $f(X)$ содержит аффинное подмножество, открытое в Y.

Задача 4.9. Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм аффинных многообразий. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

а) f является изоморфизмом;
б) f взаимно однозначен и для всех точек $x \in X$ дифференциал $d_x f\colon T_{X,x} \to T_{Y,f(x)}$ инъективен (т.е. $\operatorname{Ker} d_x f = 0$).

Указание: Сформулируйте задачу в терминах локальных колец точек x и $y = f(x)$ и соответствующих максимальных идеалов и воспользуйтесь (дважды!) леммой Накаяма.

Задача 4.10. Покажите на примере, что условие конечности необходимо для справедливости предыдущей задачи.

Определение 4.2. Аффинное многообразие X называется *нормальным,* если его координатное кольцо $k[X]$ целозамкнуто.

Упражнение 4.11. Докажите, что многообразие X нормально тогда и только тогда, когда локальные кольца всех точек $x \in X$ целозамкнуты.

Упражнение 4.12. Докажите, что гладкие многообразия нормальны.

Задача 4.13. Докажите, что квадратичный конус X, задающийся в $\mathbb{A}^3$ уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ нормален, но особ. Однозначно ли разложение на простые множители в локальных кольцах $\mathcal{O}_x$ при $x \in X$?

Упраженеие 4.14. Пусть X — нормальная кривая. Докажите, что X неособа.

Упражнение 4.15. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, и пусть G — конечная группа автоморфизмов X, порядок которой не делится на характеристику основного поля. Докажите, что многообразие X/G нормально. Выведите отсюда ещё одно решение задачи 4.13.

Определение 4.2. Пусть X — неприводимое многообразие. Многообразие $\tilde{X}$ называется *нормализацией* X, если $\tilde{X}$ нормально и существует конечный бирациональный морфизм $\nu\colon \tilde{X} \to X$.

Упраженеие 4.16. Докажите, что всякое аффинное многообразие обладает аффинной нормализацией.

Задача 4.17. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, и пусть $\nu\colon \tilde{X} \to X$ — нормализация X.

а) Пусть Z — нормальное аффинное многообразие, и пусть $f\colon Z \to X$ — доминантный морфизм. Докажите, что f пропускается через ν, т.е. существует морфизм $g\colon Z \to \tilde{X}$ такой, что $f = \nu \circ g$;

б) Пусть Z — аффинное многообразие, и пусть $f\colon Z \to X$ — конечный бирациональный изоморфизм. Докажите, что ν пропускается через f, т.е. существует (конечный бирациональный) морфизм $g : \tilde{X} \to Z$ такой, что $f \circ g = \nu$.

Выведите отсюда, что нормализация аффинного многообразия X определена однозначно (с точностью до изоморфизма над X). В частности (см. упражнения 4.14 и 4.16), всякая кривая бирационально изоморфна неособой кривой.

Задача 4.18. Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{C}$, и пусть $x \in X$. Докажите, что следующие условия эквивалентны.

а) x — нормальная точка X (т.е. локальное кольцо x целозамкнуто);

б) Всякая рациональная функция $f \in k(X)$, ограниченная (по абсолютной величине) в окрестности точки x (в точках, где она определена), регулярна в точке x.

Упражнение 4.19. Докажите, что каждое алгебраическое многообразие бирационально изоморфно нормальному.

Как мы видели, работать с аффинными многообразиями не очень удобно - в частности, образ аффинного многообразия может таковым не являться. Более общо, будучи квазикомпактными, аффинные многообразия не обладают важным свойством компактных многообразий: в то время как образ замкнутого подмножества компактного многообразия относительно непрерывного отображения замкнут, образ аффинного подмногообразия при регулярном отображении не обязательно замкнут. В случае обычных (топологических, гладких или аналитических) многообразий, общие (прежде всего — компактные) многообразия получаются склеиванием из открытых шаров. Аналогично, общие алгебраические многообразия получаются склеиванием из аффинных. Однако специфика алгебраических многообразий в том, что бо́льшую часть аналогов компактных многообразий (такие многообразия называются полными) можно сразу определить глобально.

Определение 4.3. Подмножество X проективного пространства $\mathbb{P}^N$ с однородными координатами $x_0 : \dots x_N$ называется *проективным алгебраическим многообразием*, если X задаётся обращением в нуль нескольких многочленов из $k[x_0, \dots, x_N]$.

Подмножество Y проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}^N$ называется (замкнутым) подмногообразием, если Y — проективное алгебраическое многообразие в $\mathbb{P}^N$.

Задача 4.20. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие, пусть $X = \bigcup_i U_i$ — покрытие X аффинными открытыми множествами, и пусть $Y \subset X$. Докажите, что Y — замкнутое подмногообразие X тогда и только тогда, когда $Y_i = Y \cap U_i$ — замкнутое аффинное подмногообразие U_i.

Упражнение 4.21. Докажите, что идеал I_X проективного алгебраического многообразия X однороден, т.е. вместе с каждым многочленом $F = \sum_i F_i$ содержит все его компоненты F_i (здесь F_i — однородная составляющая F степени i).

Задача 4.22. Найдите все однородные идеалы в $k[x_0, \dots, x_N]$, задающие пустое множество в $\mathbb{P}^N$.

Определение 4.4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное алгебраическое многообразие, и пусть $I_X \subset k[x_0, \ldots, x_N]$ — его (однородный) идеал. Фактор-кольцо $k[x_0, \ldots, x_N]/I_X$ называется *однородным координатным кольцом* X. Это кольцо очевидным образом является *градуированной k-алгеброй,* так что каждый элемент $F \in k[x_0, \ldots, x_N]/I_X$ однозначно представляется в виде $F = \sum_i F_i$, где F_i — элемент степени i.

Очевидным образом вводится понятие неприводимого проективного многообразия.

Упражнение 4.23. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

а) Проективное многообразие X неприводимо;
б) Существует неприводимое открытое аффинное подмножество U, плотное в X;
в) Всякое открытое аффинное подмножество $U \subset X$ неприводимо;
г) Однородное координатное кольцо X является областью целостности.

Определение 4.5. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — неприводимое проективное многообразие. Рассмотрим подмножество $k(X)$ в поле частных однородного координатного кольца X, состоящих из однородных элементов степени нуль, т.е. элементов, представимых в виде $f = \dfrac{G}{H}$, где G и H — однородные элементы одной и той же степени. Элементы $k(X)$ называются *рациональными функциями* на X.

Рациональная функция $f \in k(X)$ называется *регулярной* в точке $x \in X$, если она представима в виде $f = \dfrac{G}{H}$, где $H(x) \neq 0$.

Задача 4.24. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — неприводимое проективное многообразие. Докажите, что $k(X)$ — поле. Более того, если $U \subset X$ — открытое аффинное подмножество, то $k(X) = k(U)$.

Определение 4.6. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — неприводимое проективное многообразие. *Рациональное отображение* $\varphi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ задаётся $M+1$ рациональными функциями $h_0 : \cdots : h_M$, $h_i \in k(X)$, $i = 0, \ldots, M$. При этом наборы $h_0 : \cdots : h_M$ и $g_0 : \cdots : g_M$ определяют одно и то же отображение тогда и только тогда, когда $h_i g_j = h_j g_i$ для всех $0 \leq i, j \leq M$.

Рациональное отображение φ называется *регулярным в точке* $x \in X$, если можно выбрать набор $h_0 : \cdots : h_N$ так, чтобы $h_0, \ldots, h_N \in \mathcal{O}_x$ и не все h_i обращаются в нуль в точке x.

Отображение φ, регулярное во всех точках, называется *регулярным.*

Если $Y \subset \mathbb{P}^M$ — проективное многообразие и $\varphi(x) \in Y$ для всех точек $x \in X$, в которых φ регулярно, то говорят, что φ определяет рациональное отображение отображение X в Y.

Задача 4.25. Проверьте согласованность определения 4.6 с определениями аналогичных объектов, данными для аффинных многообразий. Докажите, что рациональное отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^M$ задаётся набором $M+1$ однородных элементов $H_0 : \cdots : H_M$ одной и той же степени из однородного координатного кольца X, причём $H_i \neq 0$ для некоторого i и два набора $H_0 : \cdots : H_M$ и $G_0 : \cdots : G_M$ задают одно и то же отображение тогда и только тогда, когда $H_i G_j = H_j G_i$ для всех $0 \leq i, j \leq M$. Более того, отображение φ регулярно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда существует представление $H_0 : \ldots H_M$ отображения φ такое, что хотя бы одно из значений $H_i(x)$, $i = 0, \ldots, M$ отлично от нуля.

Не составляет труда распространить на проективные многообразия понятия изоморфизма, бирационального изоморфизма и других понятий, введённых ранее для аффинных многообразий. Так, например, морфизм $f\colon X \to Y$ называется *конечным*, если у каждой точки $y \in Y$ существует аффинная окрестность $V \ni y$ такая, что $U = f^{-1}(V)$ аффинно и морфизм $f\colon U \to V$ конечен.

Упражнение 4.26. Найдите кольцо регулярных функций на проективном пространстве $\mathbb{P}^N$.

Задача 4.27. Докажите, что всякое рациональное отображение $\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ регулярно.

Задача 4.28. Постройте пример рационального отображения $\mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^{N-1}$, не регулярного в одной-единственной точке.

Упражнение 4.29. Докажите, что отображение гиперболы, заданной уравнением $xy = 1$, в прямую $\mathbb{A}^1$, при котором точка (x, y) переходит в точку x, продолжается до изоморфизма между замыканием гиперболы в $\mathbb{P}^2$ и проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

Задача 4.30. Докажите, что все неособые кривые второго порядка на проективной плоскости изоморфны между собой и изоморфны проективной прямой. Каким подмножествам проективной прямой изоморфны при этом эллипс, гипербола и парабола (рассмотрите отдельно вещественный и комплексный случай).

Задача 4.31. Рассмотрим *кремоново преобразование* $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$. Докажите, что φ — бирациональный автоморфизм. Найдите φ^{-1}. В каких точках регулярны φ и φ^{-1}? Какие точки склеиваются друг с другом при этих преобразованиях?

Задача 4.32.

а) Рассмотрим *отображение Веронезе* $v_d\colon \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}$, задаваемое всеми одночленами степени d от переменных $x_0, \ldots, x_N$. Докажите, что $Y = v_d(\mathbb{P}^N)$ — проективное многообразие и найдите его однородные уравнения (в виде условия на ранг некоторой матрицы). Докажите, что отображение $v_d\colon \mathbb{P}^N \to Y$ регулярно и является изоморфизмом. Какие подмногообразия $\mathbb{P}^N$ являются прообразами гиперплоскостей в $\mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}$?

б) Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие. Докажите, что $v_d(X) \subset \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}$ — проективное многообразие и v_d устанавливает изоморфизм между X и его образом.

в) Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — произвольное проективное многообразие. Докажите, что существует проективное многообразие $X' \subset \mathbb{P}^M$ такое, что X' изоморфно X и задаётся в $\mathbb{P}^M$ квадратичными уравнениями.

Задача 4.33. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное алгебраическое многообразие, пусть $L \subset \mathbb{P}^N$, $\dim L = r$ — линейное подпространство, и пусть $B = X \cap L$. Выбрав $N - r$ линейно независимых линейных форм $L_0, \ldots, L_{N-r-1}$, обращающихся в нуль на L, положим $\pi_L(x) = (L_0(x) : \cdots : L_{N-r-1}(x))$, $\pi_L\colon X \dashrightarrow$

$\mathbb{P}^{N-r-1}$. Докажите, что отображение π_L, называемое *проектированием с центром в L (или из L)* — рациональное отображение, регулярное вне B. Дайте геометрическую интерпретацию этого отображения. Каким образом получаются из него отображения аффинных многообразий, носящие то же название и рассмотренные выше?

Задача 4.34. Докажите, что если $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное алгебраическое многообразие, а $L \subset \mathbb{P}^N$ — линейное подпространство такое, что $L \cap X = \varnothing$, то $\pi_L \colon X \to \mathbb{P}^{\operatorname{codim} L-1}$ — конечный морфизм.

Задача 4.35. Выведите из задачи 4.34 *нормализационные теоремы Эмми Нётер*:

а) Пусть X — неприводимое проективное многообразие, $\dim X = n$. Тогда существует конечный морфизм $\pi : X \to \mathbb{P}^n$;

б) Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, $\dim X = n$. Тогда существует конечный морфизм $\pi\colon X \to \mathbb{A}^n$. Алгебраическая версия: алгебра конечного типа над полем без делителей нуля является целым расширением (модулем конечного типа) над кольцом многочленов.

Задача 4.36. Пусть $X \subset \mathbb{P}^M$ и $Y \subset \mathbb{P}^N$ — проективные многообразия. Рассмотрим отображение $\varphi\colon X \times Y \to \mathbb{P}^{(M+1)(N+1)-1}$ такое, что если $x = (x_0 : \dots : x_M)$, $y = (y_0 : \dots : y_N)$, то $\varphi(x, y) = (\dots : x_j y_j : \dots)$.

а) Докажите, что φ взаимно однозначно и его образ является проективным многообразием, которое также обозначается $X \times Y$ (другими словами, вложение φ задаёт на произведении проективных многообразий X и Y структуру проективного алгебраического многообразия).

б) Проверьте, что на открытых аффинных подмножествах это определение совпадает с определением произведения, данным выше для аффинных многообразий. Выведите отсюда, что (с точностью до проективного преобразования) φ не зависит от выбора координат.

в) Найдите уравнения многообразия $\mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^{(M+1)(N+1)-1}$ (в виде условия на ранг некоторой матрицы).

г) Пусть $\mathbb{P}^M = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(W)$, где V и W — векторные пространства размерностей $M + 1$ и $N + 1$ соответственно, пусть $\mathbb{P}^{(M+1)(N+1)-1} = \mathbb{P}(V \bigotimes W)$. Определим отображение $\phi\colon V \times W \to V \bigotimes W$ формулой $\phi(v, w) = v \otimes w$. Докажите, что φ — отображение, соответствующее ϕ. Основываясь на этом обстоятельстве, дайте другое доказательство независимости φ от выбора системы координат.

Отображение φ называется *вложением Сегре,* а многообразия вида $\mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N$ — многообразиями Сегре.

Задача 4.37. В обозначениях задачи 4.36, рассмотрим $\varphi(\Delta_X)$, где $\Delta_X \subset X \times X$, $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ — диагональ. Что это за многообразие (вы с ним уже встречались)?

Задача 4.38. Докажите, что подмножество $Z \subset \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N$ замкнуто (т.е. является проективным подмногообразием) тогда и только тогда, когда Z задаётся уравнениями $F_i(x_0 : \dots : x_M; y_0 : \dots : y_N)$ однородными степени m_i по x_j и степени n_i по y_l.

Как мы уже отмечали, в отличие от аффинных, проективные многообразия являются аналогом компактных гладких многообразий. В частности, образ проективного многообразия проективен (т.е. замкнут). Более общо, проективные морфизмы собственны (универсально замкнуты).

Задача 4.39. Пусть X — проективное, а Z — аффинное многообразие. Докажите, что проектирование на второй сомножитель $X \times Z \to Z$ замкнуто, т.е. переводит замкнутые подмножества в замкнутые. (Указание: достаточно рассмотреть случай $X = \mathbb{P}^N$, $Z = \mathbb{A}^m$).

Задача 4.40. Пусть $X \to Y$ — конечный морфизм. Докажите, что f собственен, т.е. для любого аффинного многообразия Z морфизм $f \times \mathrm{Id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ замкнут, т.е. переводит замкнутые подмножества в замкнутые (это усиление задачи 4.5 и упражнения 4.6).

Задача 4.41. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие, $f\colon X \to \mathbb{P}^M$ — морфизм. Докажите, что образ $f(X) \subset \mathbb{P}^M$ замкнут, т.е. является проективным многообразием.

Упражнение 4.42. Докажите, что всякий морфизм неприводимого проективного многообразия X в аффинное многообразие Y переводит X в точку. В частности, на X нет регулярных функций за исключением констант.

Упражнение 4.43. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие, $\dim X > 0$, и пусть $H \subset \mathbb{P}^N$ — гиперповерхность. Докажите, что $X \cap H \neq \varnothing$.

Поскольку касательные пространства, конусы и звёзды определены локально, их можно рассматривать для любых проективных многообразий. При этом рассмотрев проективное замыкание (вложенных) касательных пространств, конусов и звёзд, мы получаем соответствующие проективные объекты (подмногообразия объемлющих проективных пространств).

Упражнение 4.44. Докажите, что грассманово многообразие $G(N,n)$ n-мерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^N$ в плюккеровом вложении является неособым $(n+1)(N-n)$-мерным проективным многообразием в $\mathbb{P}^{\binom{N+1}{n+1}-1}$.

Задача 4.45. Пусть X и Y — проективные алгебраические многообразия. Найдите $\operatorname{Sing} X \times Y$.

Как мы увидим ниже, для вычисления размерности проективных многообразий очень полезна теорема о размерности слоёв 3.40. Более того, в случае проективных многообразий эту теорему иногда можно использовать для доказательства неприводимости.

Задача 4.46. Пусть $f\colon X \to Y$ — сюръективный морфизм проективных многообразий, все слои которого неприводимы и имеют одну и ту же размерность. Докажите, что из неприводимости Y вытекает неприводимость X.

Задача 4.47. Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие. Многообразие

$$S_X = \overline{\{(x,y,z) \in X \times X \times \mathbb{P}^N \mid y \neq x, z \in \langle x,y\rangle\}},$$

где $\langle x,y\rangle$ — прямая в $\mathbb{P}^N$, проходящая через x и y, а черта обозначает замыкание в $X \times X \times \mathbb{P}^N$, называется *абстрактным многообразием секущих*. Образ S_X относительно проектирования $\varphi\colon X \times X \times \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ обозначается SX и называется *многообразием секущих многообразия* X.

а) Найдите размерность многообразия S_X;

б) Обозначим через $T'_{X,x}$ образ слоя S_X над точкой $x \times x$ относительно проекции φ. Что это за многообразие (вы с ним уже встречались)?

Задача 4.48.

а) Докажите, что всякое проективное многообразие $X^n \subset \mathbb{P}^N$ может быть взаимно однозначно спроектировано в $\mathbb{P}^M$, где $M \le 2n+1$.
б) Если вдобавок X неособо, то X может быть изоморфно спроектировано в $\mathbb{P}^M$, где $M \le 2n+1$.
в) Верно ли утверждение б) для особых многообразий?

Задача 4.49. Докажите, что многообразие X может быть изоморфно спроектировано в $\mathbb{P}^M$ в следующих случаях:

а) $X = v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\frac{n(n+3)}{2}}$ — многообразие Веронезе, $M = 2n$;
б) $X = \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \subset \mathbb{P}^{ab+a+b}$ — многообразие Сегре, $M = 2(a+b)-1$;
в) $X = G(2m+1, 1) \subset \mathbb{P}^{m(2m+3)}$ — многообразие Грассмана, $M = 8m-3$.

Задача 4.50. Пусть $G(N, n)$ — грассманово многообразие n-мерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^N$, и пусть $\mathcal{I} \subset \mathbb{P}^N \times G(N, n)$, $\mathcal{I} = \{(x, \alpha) \mid L_\alpha \ni x\}$, где L_α обозначает линейное подпространство, соответствующее точке $\alpha \in G(N, n)$. Подмножество $\mathcal{I}$ называется *многообразием инцидентности* или *универсальным семейством n-мерных линейных подпространств*. Докажите, что $\mathcal{I}$ — неособое проективное многообразие. Найдите его размерность.

Задача 4.51. Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие, и пусть $\mathcal{F}_X \subset G(N, r)$ — подмножество грассманова многообразия, состоящее из точек, соответствующих линейным подпространствам размерности r, содержащимся в X. Докажите, что $\mathcal{F}_X$ — проективное алгебраическое многообразие.

Задача 4.52. Докажите, что $\dim \mathcal{F}_X \le 2n-2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $X = \mathbb{P}^n$.

Задача 4.53. Найдите размерность многообразия $\mathcal{F}_Q$, где $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — квадрика.

Задача 4.54. Докажите, что каждая поверхность $X \subset \mathbb{P}^3$ степени не больше 3 содержит прямую (т.е. $\mathcal{F}_X \ne \varnothing$), но для каждого $d \ge 4$ существует поверхность X степени d, не содержащая прямых, так что $\mathcal{F}_X = \varnothing$ (степенью гиперповерхности называется степень задающего её уравнения).