ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТРЕТЬЕГО СЕМЕСТРА

17 декабря 2000г.

Задача 1. Пусть $A\colon V \to V$ и $B\colon W \to W$ — линейные операторы. Выразите след оператора $A \otimes B\colon V \otimes W \to V \otimes W$ через следы операторов A и B.

Задача 2. Пусть V — n-мерное векторное пространство. *Рангом* $\mathrm{rk}\,\omega$ бивектора $\omega \in \bigwedge^2 V$ называется минимальное число r такое, что ω представим в виде суммы r разложимых бивекторов. Какие значения может принимать функция rk в следующих случаях:

а) $n = 3$;
б) $n = 4$;
в) $n = 5$;
г) $n = 6$.

Задача 3.

а) При каких l и m аффинные плоские кривые C_l и C_m, задающиеся в $\mathbb{A}^2$ уравнениями $y = x^l$ и $y = x^m$ соответственно, изоморфны друг другу?
б) При каких l и m аффинные плоские кривые C_l и C_m, задающиеся в $\mathbb{A}^2$ уравнениями $y^2 = x^l$ и $y^2 = x^m$ соответственно, изоморфны друг другу?

Задача 4. Найдите все морфизмы (регулярные отображения) $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$, где $m < n$.

Задача 5.

а) Пусть $\Pi \subset \mathbb{P}^4$ — плоскость. Для каких натуральных чисел d существует форма $F \in k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]$ такая, что $\deg F = d$, а гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^4$, определяемая формой F, неособа и содержит плоскость Π?
б) Пусть $l \subset \mathbb{P}^3$ — прямая. Докажите, что для каждого натурального числа d существует форма $F \in k[T_0, T_1, T_2, T_3]$ такая, что $\deg F = d$, а поверхность $X \subset \mathbb{P}^3$, определяемая формой F, неособа и содержит прямую l.

Задача 6.

а) Докажите, что через любые девять, но не через любые десять точек проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ можно провести (быть может приводимую) кубическую кривую (кривая называется кубической, если она задаётся кубическим уравнением).
б) Найдите наибольшее число r такое, что через произвольные r точек проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ можно провести приводимую кубическую кривую.