Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 6 сентября

1. Докажите *неравенство Бернулли*:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad n \in \mathbb{N},\ x \geq -1.$$

2. Укажите такое натуральное $n > 1$, что $2^n > n^{1000}$.

3. Укажите такое натуральное n, что $1,0001^n > 1000000$.

4. Укажите такое натуральное n, что $1000^n < n!$

5. Докажите, что $\sqrt[100]{2} < 1,01$.

6. При каком натуральном k величина $\frac{k^2}{1{,}001^k}$ максимальна?

Определение. *Отношением* на множестве M называется подмножество множества пар $M \times M$. Отношение $R \subset M \times M$ называется *отношением эквивалентности*, если оно

симметрично, т. е. $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$;
транзитивно, т. е. $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$;
рефлексивно, т.е. $(x,x) \in R \quad \forall x \in M$.

Множество попарно эквивалентных относительно R элементов множества M называется *классом эквивалентности.*

7. Дайте определение рационального числа как класса эквивалентности. Определите операции над рациональными числами.

Определение. *Рациональным числом* называется целочисленная прямая на плоскости, проходящая через начало координат и не совпадающая с осью ординат.

8. Докажите эквивалентность приведенного определения рационального числа вашему. Определите сложение и умножение целочисленных прямых.

9. Есть ли рациональные корни у многочленов а) $x^4+2x^3+8x+16$; б) $x^4+5x^3+3x^2-16x-20$; в) $2x^4+10x^2+5x+10$; г) $3x^3-7x^2-4x+2$?

10. Докажите, что существуют два иррациональных числа a и b, такие что а) $a+b, ab$ рациональны; б) a^b рационально.

11. Что такое $\sqrt{2}$?

12. Докажите, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

13. При каких целых a,b,c сумма $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}$ рациональна?

14* Докажите, что сумма $a_1\sqrt{b_1}+\cdots+a_k\sqrt{b_k}$ иррациональна, если a_i целые, а b_i различные положительные целые, свободные от квадратов.

15. Рационально ли число $\sin 20^o$?

16. Целочисленные точки на плоскости окружены кружками радиусом 10^{-10}. Докажите, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает а) еще хотя бы один кружок;
б) бесконечно много кружков.

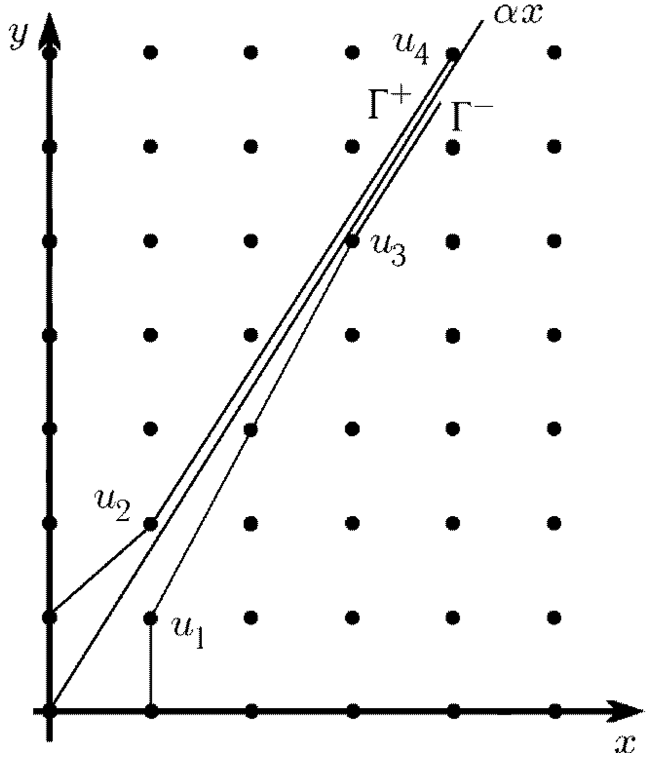

Рис. 1.

17. Докажите, что а) существует пара целых чисел m и n, такая что $|m - n\sqrt{2}| < 10^{-10}$;
б) таких пар бесконечно много.

Цепные дроби. Задача 17 допускает следующее решение: положим

$$m_k = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^k + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^k, \qquad n_k = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^k - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^k.$$

Тогда $m_0 = 1$, $n_0 = 0$, $m_{k+1} = m_k + 2n_k$, $n_{k+1} = m_k + n_k$. Отсюда следует, что все m_k и n_k целые, и, кроме того, $|m_k - n_k\sqrt{2}| = (\sqrt{2}-1)^k$, что меньше 10^{-10} для достаточно больших k, поскольку $\sqrt{2} - 1 = 0,414\dots < 1$.

Приведенное, на первый взгляд, искусственное, решение, вытекает, в действительности, из теории цепных дробей, служащей для приближения иррациональных чисел рациональными. Для получения наилучших приближений можно пользоваться следующими методами.

Метод вбивания колышков. Изобразим число α (положительное, для определенности) лучом $y = \alpha x$ в первом квадранте плоскости. Отметим целые точки (k, n), $k, n \in \mathbb{Z}^+$. Обозначим через Γ^+ и Γ^- ломанные, являющиеся частями границ выпуклых оболочек множеств целых

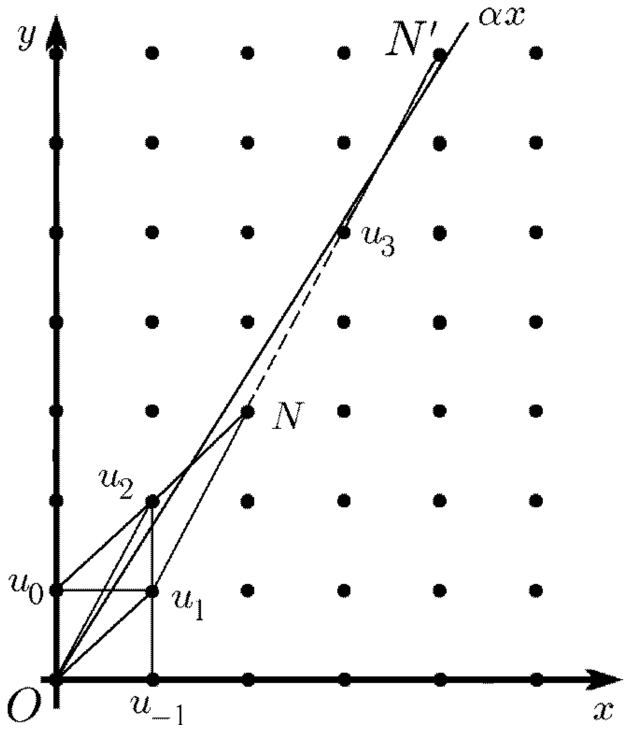

Рис. 2. Первый параллелограмм образован вершинами $Ou_{-1}u_0u_1$; второй «« $Ou_0u_1u_2$; третий «« Ou_1u_2N; чтобы получить вершину четвертого параллелограмма, нужно сдвинуть отрезок u_1N, до отрезка u_3N'

точек, расположенных выше и ниже луча соответственно (рис. 1). Занумеруем единой нумерацией вершины $u_k = (q_k, p_k)$ обоих ломанных, $u_{2k-1} \in \Gamma^-$, $u_{2k} \in \Gamma^+$.

18. Докажите, что числа p_k/q_k приближают α с ошибкой, не превышающей $1/(q_k)^2$.

Метод вытягивания носов. Мы строим последовательность параллелограммов, натянутых на векторы Ou_{k-1}, Ou_k. Вершина N с координатами $u_{k-1} + u_k$, противоположная вершине O, называется «носом». Начальный параллелограмм — единичный квадрат, $u_{-1} = (1, 0)$, $u_0 = (0, 1)$. Далее поступаем так: перемещаем отрезок $u_{k-1}N$ вдоль прямой, на которой он лежит, до тех пор, пока точка N не пересечет исходный луч, и еще немного, чтобы концы сдвинутого отрезка попали в целые точки. Начало сдвинутого отрезка обозначим через u_{k+1}. Это и задает новый параллелограмм. (См. рис. 2.)

19. Докажите, что полученные точки u_k — те же, что и в методе вбивания колышков.

20. Докажите, что все параллелограммы имеют одинаковую площадь 1. Выведите отсюда равенство $|p_1/q_k - p_{k+1}/q_{k+1}| = 1/(q_kq_{k+1})$, приво-

дящее к той же оценке на порядок приближения числа α, что и выше.

Цепной дробью называется бесконечная дробь вида $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$, $a_i \in \mathbb{N}$ $(a_1 \geq 0)$.

21. Докажите, что каждое иррациональное число допускает единственное представление в виде бесконечной цепной дроби (цепная дробь конечна тогда и только тогда, когда она представляет рациональное число).

Если в бесконечной цепной дроби отбросить все члены, начиная с $(n+1)$-го, то получатся рациональные приближения исходного иррационального числа.

22. Докажите, что полученные рациональные приближения совпадают с приближениями, полученными методами вбивания колышков и вытягивания носов. Как при помощи этих методов определить числа a_k?

23. Пусть $\alpha = \sqrt{2}$. Рассмотрим преобразование A плоскости в себя, задаваемое равенством $(x, y) \mapsto (x + y, 2x + y)$ Докажите, что это преобразование сохраняет целые точки, прямую $y = \sqrt{2}\,x$, и переставляет ломаные $\Gamma^{\pm}$. Выведите отсюда, что $Au_k = u_{k+1}$, и что цепная дробь для $\sqrt{2}$ периодическая. Найдите разложение $\sqrt{2}$ в цепную дробь.

Приведем явную формулу. Преобразование A действует на векторы с координатами $(\pm 1, \sqrt{2})$ умножением на $1 \pm \sqrt{2}$, поэтому из равенства $u_0 = (0, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, \sqrt{2}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, \sqrt{2})$ вытекает равенство $u_k = \frac{(1+\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}(1, \sqrt{2}) + \frac{(1-\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}(-1, \sqrt{2})$, что эквивалентно формулам из приведенного выше решения задачи 17.