Высший Колледж математики

Математический анализ 1-й курс 8 ноября 2000 года

Определение. *Степенным рядом* называется выражение вида $\sum a_k(x-a)^k$, где a — число, a_k — постоянные коэффициенты, а x — переменная. Сумма числового ряда $\sum a_k(x_0-a)^k$ при фиксированном x_0 (если этот числовой ряд сходится) называется *значением* степенного ряда при $x=x_0$.

1. При каких $x \in \mathbb{R}$ сходятся ряды
$$\sum \frac{x^k}{k}\ ; \qquad \sum \frac{x^k}{k!}\ ; \qquad \sum k!\, x^k\ ; \qquad \sum (2^k+3^k)x^k\ ?$$

2. А на множестве $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел? А на множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел?

Теорема. *Степенной ряд $\sum a_k(x-a)^k$ либо сходится только при $x=a$, либо при всех x, либо для некоторого R сходится при $|x-a|<R$ и расходится при $|x-a|>R$.*
Определение. Такое число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Всюду ниже $a=0$.
Лемма. *Если ряд $\sum a_k z^k$ сходится, то ряд $\sum a_k x^k$ сходится для любого x, такого что $|x|<|z|$.*
Доказательство. $\sum a_k z^k$ сходится $\Rightarrow$ $|a_k z^k|<C$ $\Rightarrow$ $|a_k x^k| = |a_k z^k|\, q^k \leqslant Cq^k$, где $q = \left|\frac{x}{z}\right| < 1$, т.е. $|a_k x^k|$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\Rightarrow$ $\sum a_k x^k$ сходится.

3. Выведите теорему из леммы. Докажите, что
$$R = \sup\Big\{\ |z| : \text{последовательность } \{a_k z^k\} \text{ ограниченная}\ \Big\}\ .$$

4. Придумайте ряды, областью сходимости которых является а) $(-1,1)$; б) $[-1,1)$; в) $(-1,1]$; г) $[-1,1]$.

5. Докажите **лемму о мажорируемой сходимости**: пусть последовательность сходящихся рядов $\sum a_i^{(k)}$ сходится почленно. Тогда предельный ряд сходится и $\sum\limits_i \lim\limits_{k\to\infty} a_i^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_i a_i^{(k)}$ при условии, если ряды $\sum a_i^{(k)}$ мажорируются единым сходящимся рядом, $|a_i^{(k)}| < c_i$, $\sum c_i < \infty$.

Определение. Если область сходимости степенного ряда состоит более, чем из одной точки, и значение ряда в любой точке этой области совпадает со значением некоторой функции f, то ряд называется *разложением* функции f в области сходимости.

6. Докажите, что сумма степенного ряда непрерывна на множестве сходимости.

7. Докажите, наконец, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

8. Докажите(-таки!) признаки сходимости Коши и Даламбера и найдите области сходимости рядов
$$\sum x^{2^n}\ ; \qquad \sum \frac{x^n}{2^n+3^n}\ ; \qquad \sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^n\ .$$

9. Найдите области сходимости степенных рядов, полученных из числовых рядов, встречавшихся в предыдущих задачах:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} x^n\ ; \qquad \sum \frac{n^2-10n+1}{n^3+17n} x^n\ ; \qquad \sum \frac{n^3}{n^5-17} x^n\ ;$$
$$\sum \frac{1}{n \ln n} x^n\ ; \qquad \sum \frac{1}{n \ln^2 n} x^n\ ; \qquad \sum \frac{1}{n \ln n \ln\ln n} x^n\ ;$$
$$1 - 1\cdot x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^6 - \dots - \frac{1}{3}x^{11} + \cdots\ ;$$
$$\sum \mathrm{fib}_n x^n\ , \quad \text{где } \mathrm{fib}_n \text{ — числа Фибоначчи.}$$

10. Пусть ряд $\sum a_n x^n$ имеет радиус сходимости R. Найдите радиусы сходимости рядов

$$\sum a_n b^n x^n\ ; \qquad \sum a_n^3 x^n\ .$$

Определение. Для степенных рядов $\sum a_k x^k$ и $\sum b_k x^k$ определены их *сумма* $\sum (a_k + b_k) x^k$ и *произведение* $\sum_k \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k$ (которое позволяет разумно определить и произведение числовых рядов).

11. Пусть ряды $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$ имеют радиусы сходимости R и r соответственно. Найдите радиус сходимости их суммы. Что можно сказать о радиусе сходимости их произведения?

12. Докажите, что

   а) если существует предел $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q$, то ряд $\sum a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R = q^{-1}$;

   б) в общем случае радиус сходимости степенного ряда выражается формулой $R = q^{-1}$, где $q = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

13. Разложениями каких функций являются ряды

$$\sum x^n\ ; \qquad \sum \frac{1}{n} x^n\ ; \qquad \sum n x^{n-1}\ ; \qquad \sum n(n-1) x^{n-2}\ ;$$
$$\sum \mathrm{fib}_n x^n\ , \quad \text{где } \mathrm{fib}_n \text{ — числа Фибоначчи}\ ;$$
$$\sum \mathrm{cat}_n x^n\ , \quad \text{где } \mathrm{cat}_n \text{ — числа Каталана.}$$

Определение. *Числа Каталана* cat_n определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$\mathrm{cat}_0 = 1, \qquad \mathrm{cat}_{n+1} = \mathrm{cat}_0 \mathrm{cat}_n + \mathrm{cat}_1 \mathrm{cat}_{n-1} + \ldots + \mathrm{cat}_n \mathrm{cat}_0.$$

Вот начало этой последовательности: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$.
Определение. *Рациональной функцией* называется отношение двух взаимно простых многочленов $P(x)/Q(x)$.

14. Докажите, что всякая рациональная функция над полем комплексных чисел единственным образом представляется в виде многочлена и суммы элементарных дробей, т.е. в виде

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) \quad &+ \quad \frac{b_1}{(x-a_1)} + \frac{b_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{b_{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \ldots \\ &+ \quad \frac{c_1}{(x-a_n)} + \frac{c_2}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{c_{\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}},\end{aligned}$$

где p — многочлен, $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — целые положительные числа.

15. Докажите, что если степенной ряд представляет рациональную функцию, знаменатель которой не делится на x, то его радиус сходимости равен расстоянию от нуля до ближайшего к нулю (вещественного или комплексного) корня многочлена Q.

16. * Докажите, что если каждый из рядов $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$ представляет рациональную функцию, то то же верно и для ряда $\sum a_n b_n x^n$.