Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 6 сентября

Ниже, до специального объявления, все числа (элементы последовательностей и т. д.) предполагаются *рациональными.*

Определение. ε-*окрестностью* точки a называется множество точек $U_\varepsilon(a) = \{x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$. Точка a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$ (обозначение: $a = \lim a_n$), если для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, находятся в ε-окрестности точки a.

1. Сформулируйте, что означает, что число a *не является* пределом последовательности $\{a_n\}$. Докажите, что 1 не является пределом последовательности $\{1/n\}$.

2. Докажите, что у последовательности не может быть больше одного предела.

3. Найдите предел последовательности

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots \pm \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

4. Докажите, что если у последовательности $\{a_n\}$ есть предел, то для любого положительного числа ε существует номер K, такой что $|a_k - a_{k+1}| < \varepsilon$ для всех $k \geq K$.

Определение. Точка a называется *предельной точкой* последовательности $\{a_n\}$, если в любой ε-окрестности точки a, $\varepsilon > 0$, найдутся точки этой последовательности, отличные от a.

5. Докажите, что предел сходящейся последовательности является единственной ее предельной точкой.

6. Существует ли последовательность, для которой все рациональные числа являются предельными точками?

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$.

7. Докажите, что всякая последовательность, имеющая предел, фундаментальна.

8. Приведите пример фундаментальной последовательности на множестве рациональных чисел, не имеющей предела.

9. Докажите, что для любой цепной дроби $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ с натуральными a_i последовательность подходящих цепных дробей A_j (полученных обрывом дроби на j-м месте) фундаментальна.

Модели вещественных чисел.

1) Десятичные числа с отношением эквивалентности на хвосты нулей и девяток.

2) Сечения на множестве рациональных чисел.

3) Классы эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел (две последовательности эквивалентны, если предел их разности существует и равен нулю).

Аксиома полноты в множестве вещественных чисел.

1) *Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.*

2) *Любая фундаментальная последовательность имеет предел.*

3) *Любая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*

4) *Любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.*

10. Докажите, что эти формулировки аксиомы полноты эквивалентны между собой.

11. Докажите, что ваша любимая модель вещественных чисел удовлетворяет аксиоме полноты.

С этого момента все встречающиеся числа (элементы последовательностей и т. д.) предполагаются *вещественными*, если специально не оговорено противное.

Определение. *Предельной точкой множества* называется точка, в любой ε-окрестности которой имеются элементы этого множества.

12. Докажите, что у любой последовательности точек отрезка $[0, 1]$ имеется предельная точка.

13. Найдите предельные точки множеств
а) $\left\{\frac{2+(-1)^n}{n}\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$; в) $\{\sin n\}$.

14. Найдите разложение в цепную дробь ¡¡золотого сечения¿¿ $(1+\sqrt{5})/2$.

15. Докажите, что существует предел отношений последовательных чисел Фибоначчи и найдите его.

16. Докажите, что

а) последовательность $a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n \text{ раз}}$ имеет предел и найдите его;

б) последовательность, заданная соотношением $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $n \geq 2$, $a_1 = 1$, имеет предел и найдите его.

17. Найдите предел последовательности p_k/q_k, заданной соотношениями $p_0 = 0, q_0 = 1$, $p_{k+1} = p_k + q_k$, $q_{k+1} = 2p_k + q_k$.

18. Последовательность $\{1_n\}$ задана правилом

$$1_n = \frac{1}{n}(\text{число чисел в множестве } \{2^0, 2^1, \ldots, 2^n\}, \text{ начинающихся с } 1).$$

Докажите, что эта последовательность имеет предел. Найдите его. То же самое для последовательностей $2_n, \ldots, 9_n$, определенных аналогичным образом.