Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 20 сентября

**Определение.** Пусть $M$ — множество. Функция $\rho : M \times M \to \mathbb{R}_+$ называется *расстоянием* (или *метрикой*), если

а) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

б) она симметрична, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любой пары точек $x, y \in M$;

в) выполняется *неравенство треугольника*: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для любой тройки точек $x, y, z \in M$.

Множество, снабженное метрикой, называется *метрическим пространством.*

1. Для произвольного множества $M$ положим $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$. Докажите, что определенная таким образом функция является метрикой.

2. Докажите, что следующие функции для пространства $\mathbb{R}^n$ являются метриками:

а) $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$ (пространство $\mathbb{R}^n_2$);

б) $\rho_1(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$ (пространство $\mathbb{R}^n_1$);

в) $\rho_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$ (пространство $\mathbb{R}^n_\infty$);

г) $\rho_p(x, y) = \left(\sum_i |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$, $p > 1$ (пространство $\mathbb{R}^n_p$);

Докажите, что $\lim\limits_{p \to \infty} \rho_p(x, y) = \rho_\infty(x, y)$. Является ли метрикой $\rho_p(x, y)$ при $p < 1$?

3. Опишите, как выглядит шар единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ относительно каждой из приведенных метрик.

**Определение.** Множество в метрическом пространстве называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса.

4. Докажите, что объединение двух ограниченных множеств ограничено.

5. На пространстве $\mathbb{N}$ натуральных чисел 10@-адическая метрика задается равенством $\rho(a, b) = 10^{-k}$, если $k$ — наибольшее такое число, что последние $k$ цифр чисел $a$ и $b$ совпадают (мы полагаем, что $\rho(a, a) = 0$, или, другими словами, что у одинаковых чисел совпадает бесконечно много цифр). Докажите, что $\rho$ — метрика.

6. Докажите, что на пространстве отрезков на прямой следующие функции являются метриками:

а) $\rho([a,b],[c,d]) = |a-c| + |b-d|$;

б) $\rho(I_1, I_2) = |I_1| + |I_2| - 2|I_1 \cap I_2|$ (где $|I|$ — длина отрезка).

7. Докажите, что всякое подмножество $M_1$ метрического пространства $(M, \rho)$ является метрическим пространством относительно метрики $\rho_1$, заданной ограничением метрики $\rho$ на пары точек из $M_1$. Такое метрическое пространство называется *метрическим подпространством* в $M$.

8. Зададим функцию $\rho$ на пространстве пар неотрицательных вещественных чисел, положив $\rho(x,y) = 10^{-n}$, где $n$ ««« номер первого элемента, в котором цепные дроби, представляющие числа $x$ и $y$, различаются (в частности, $\rho(x,x) = 0$ для любого числа $x$). Верно ли, что функция $\rho$ задает метрику?

9. Пусть функция $\rho$ задает метрику. Верно ли, что функция $\rho^2$ также задает метрику на том же множестве?

10. Пусть $(M, \rho)$ ««« метрическое пространство. Введем функцию $R$ на множестве пар ограниченных подмножеств множества $M$, положив

$$R(X,Y) = \sup_{x \in X, y \in Y} \rho(x,y).$$

Верно ли, что функция $R$ задает метрику? А если изменить ее определение, положив ее равной нулю на парах совпадающих множеств?

**Определение.** Последовательность $a_n$ в метрическом пространстве $M$ с метрикой $\rho$ называется *сходящейся* к точке $a \in M$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число $N$, что $\forall n>N$ выполнено неравенство $\rho(a_n, a)<\varepsilon$. Последовательность называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число $N$, что $\forall n, m>N$ выполнено неравенство $\rho(a_n, a_m)<\varepsilon$.

11. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Метрическое пространство *полно*, если всякая фундаментальная последовательность сходится. *Пополнением* пространства $M$ называется полное пространство $\widetilde{M}$, если $M \subset \widetilde{M}$ — подпространство, и всякая точка в $\widetilde{M}$ является предельной для $M$.

Проверьте, являются ли полными следующие пространства. Если нет, определите их пополнения:

12. Пространство $M = \mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.

13. Пространство отрезков на прямой с одной из метрик задачи 6.

14. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$ с обычным расстоянием.

15. График функции $y = \sin\frac{1}{x}$, рассматриваемый как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$.

16. Докажите, что у каждого пространства существует, и при том единственное (с точностью до изоморфизма), пополнение. (Два метрических пространства называются *изоморфными*, если существует взаимнооднозначное отображение одного из них на другое, сохраняющее расстояние.)

17. Пространство $\mathbb{O}_{10}$ 10-адических чисел состоит из формальных бесконечных последовательностей

$$\cdots a_3\, a_2\, a_1\, a_0\ , \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\ .$$

Докажите, что $\mathbb{O}_{10}$ является пополнением пространства $\mathbb{N}$ по 10-адической метрике. Определите сложение, умножение и вычитание в $\mathbb{O}_{10}$. (Заметим, что в $\mathbb{N}$ вычитание не определено!)

18. Какие элементы пространства (кольца!) $\mathbb{O}_{10}$ имеют обратные? (Это такие элементы, на которые можно поделить любой элемент кольца.)