Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 4 октября

Определение. *Числовым рядом* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ называется последовательность чисел a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, $\ldots$.

1. Докажите, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n \longrightarrow 0$. Верно ли обратное?

2. При каких значениях параметров сходятся ряды $\sum q^n$; $\sum \frac{1}{z^n}$?

3. Докажите, что
а) ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится; б) ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится.

4. При каких α сходится ряд $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?

5. Сходятся ли ряды
а) $\sum \frac{n^2-10n+1}{n^3+17n}$, б) $\sum \frac{n^3}{n^5-17}$; в*) $\sum \frac{1}{n \ln n}$, г*) $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$, д*) $\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$?

6. Докажите *критерий Даламбера:* пусть существует предел $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Тогда при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится, при $q < 1$««« сходится. Что происходит при $q = 1$?

7. Докажите *критерий Коши:* пусть существует предел $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится, при $q < 1$««« сходится. Что происходит при $q = 1$?

8. Докажите, что следующий ряд сходится и найдите его сумму

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$$

Переставьте члены ряда так, чтобы полученный ряд сходился к 7.

Определение. Ряд $\sum a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

9. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

10. Докажите, что при любой перестановке членов абсолютно сходящегося ряда его сумма не меняется.

11. Докажите следующую *теорему Римана:* если ряд сходится, но не абсолютно (говорят, *условно*), то можно переставить его члены так, чтобы полученный ряд сходился к любому наперед заданному числу.

12*. Пусть ряд $\sum a_n$ из комплексных чисел сходится. Будем переставлять произвольно его члены. Какие значения суммы могут получиться?

13. Сходится ли, а если да, то абсолютно или нет, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$?

14. Докажите, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать, $(\sum a_n)(\sum b_m) = \sum a_n b_m$. Что означает запись $\sum a_n b_m$? В каком порядке суммировать эту двухиндексную последовательность чисел? Что получится, если умножить абсолютно сходящийся ряд на сходящийся ряд?

15. Перемножьте следующие ряды
а) $(1 + x + x^2 + \ldots)^2$,
б) $(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots)$ и $(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots)$.
Чему равна сумма ряда $\sum \frac{x^n}{n!}$.

16. Докажите, что следующие пространства последовательностей являются метрическими пространствами:

а) пространство l_2, состоящее из последовательностей $\{a_n\}$, таких, что ряд $\sum a_n^2$ сходится, с метрикой $\rho_2(\{a_n\},\{b_n\}) = \sqrt{\sum(a_n - b_n)^2}$;

б) пространство l_1, состоящее из таких последовательностей $\{a_n\}$, что ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, с метрикой $\rho_1(\{a_n\},\{b_n\}) = \sum |a_n - b_n|$;

в) пространства l_∞ и l_p $(p > 1)$ определите самостоятельно.

17. Какие из приведенных в задаче 16 метрических пространств являются полными?

18. Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$, где f_n ««« последовательность чисел Фибоначчи, $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$.

19 (Фибоначчева система счисления). Докажите, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде $a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots$, где f_n ««« числа Фибоначчи, а каждое из чисел a_i равно нулю или единице, причем единиц в сумме конечное число и два подряд идущих элемента последовательности a_i не могут равняться единице. Придумайте алгоритмы перевода чисел из фибоначчевой системы счисления в позиционную и обратно, а также алгоритмы сложения и умножения чисел в этой системе счисления.

Определение. Нормой на линейном пространстве V над полем $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ называется функция $\|\,.\,\|$, удовлетворяющая свойствам:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

2) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in V$;

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для всех $\lambda \in K$, $x \in V$.

20. Докажите, что норма на пространстве задает метрику по формуле: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Пусть p «« простое число. Определим функцию $\mathrm{ord}_p(m)$, $m \in \mathbb{N}$, как степень с которой входит число p в число m.

21. Вычислите $\mathrm{ord}_p((p^n)!)$.

Введем функцию $|\,.\,|_p$ на пространстве рациональных чисел по формуле $|a/b|_p = p^{-(\mathrm{ord}_p a - \mathrm{ord}_p b)}$.

22. Докажите, что функция $|\,.\,|_p$ удовлетворяет аксиомам нормы.

23. Вычислите $|2^{2^n}/2^n|_2$, $|2^{2^n}/(2^n)!|_2$.

24. Пусть $x \in \mathbb{Q}$ и $|x|_p \le 1$ для любого простого числа p. Тогда $x \in \mathbb{Z}$.

25. Докажите равенство: $\frac{1}{\prod_p |x|_p \cdot |x|_\infty} = 1$ для любого числа $x \ne 0$, $x \in \mathbb{Q}$, а $|\,.\,|_\infty$ — обычная евклидова длина.

26. Докажите неравенство $|x + y|_p \le \max(|x|_p, |y|_p)$, $x, y \in \mathbb{Q}$.

27. Докажите, что если $|x|_p \le |y|_p$, то $|y|_p = |x - y|_p$.

28. Рассмотрим шар $D(a, r) = \{x \mid |x - a|_p \le r\}$. Пусть $b \in D(a, r)$. Тогда $D(a, r) = D(b, r)$.

В заключение опишем все функции на пространстве $\mathbb{Q}$ со свойствами нормы и условием $\|m\| \le 1$ при $m \in \mathbb{Z}$.

Если $\|m\| = 1$ для всех чисел $m \in \mathbb{Z}$, то норма тривиальна. Пусть m_0 «« такое наименьшее положительное целое число, что $\|m_0\| < 1$. Если найдутся два таких положительных числа $m_1, m_2 \ne \pm 1$, что $m_0 = m_1 m_2$, то по свойству 3) нормы $\|m_0\| = \|m_1\| \|m_2\|$. По условию минимальности числа m_0 произведение $\|m_1\| \|m_2\| = 1$. Но $\|m\| < 1$. Поэтому число m_0 простое. Обозначим его через p.

Пусть q «« простое число, $p \neq q$ и $||q|| < 1$. Тогда найдутся два таких числа M и N, что $||p||^N < 1/2$, $||q||^M < 1/2$. Поскольку p и q взаимно просты, то найдутся такие целые числа m и n, что $nq^M + mp^N = 1$.

Тогда $1 = ||nq^M + mp^N|| < ||n|| \cdot 1/2 + ||m|| \cdot 1/2 \leq 1$, поскольку $||m|| \leq 1$ для любого целого числа m (по условию). Итак, для любого простого числа q, $q \neq p$, $||q|| = 1$, и для любого числа $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p^{\alpha} \ldots p_k^{\alpha_k}$ имеем $||m|| = ||p||^{\alpha}$, где $\alpha = \operatorname{ord}_p m$ и $||p|| \leq 1$.

В дальнейших лекциях мы покажем, что выбор числа $||p|| \leq 1$ приводит к эквивалентным метрикам. По ряду причин удобно положить $||p|| = 1/p$. Тем самым $||m|| = p^{-\operatorname{ord}_p m} = |m|_p$.