Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 11 октября

Открытые и замкнутые множества

Пусть M есть произвольное метрическое пространство с метрикой ρ.

Определение. *Окрестностью* точки $x \in M$ называется произвольный открытый шар $U = \{y \in M,\ \rho(x, y) < r\}$. Подмножество $A \subset M$ *открыто*, если всякая точка этого множества содержится в A вместе с некоторой окрестностью.

1. Как выглядит открытое подмножество на прямой $\mathbb{R}$?

2. Открыто ли подмножество в $\mathbb{R}^2$ (точнее, в $\mathbb{R}^2_2$, $\mathbb{R}^2_1$ и $\mathbb{R}^2_\infty$), заданное неравенством

а) $x + y > 0$; б) $x^3 + y^3 \geq 0$; в) $(x^2 + y^2)^2 < x^2 - y^2$?

3. Покажите, что объединение любого семейства открытых подмножеств открыто. Верно ли то же самое для пересечения открытых множеств?

Определение. Множество A *замкнуто*, если оно содержит все свои предельные точки.

4. Замкнуто ли пересечение любого семейства замкнутых подмножеств? А объединение?

5. Привести пример множества без предельных точек, для которого inf расстояний между точками равен нулю.

6. Пусть $A \subset M$ — открытое подмножество метрического пространства M, а $B \subset M$ — замкнутое. Что можно сказать о множествах $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

7. Докажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к A — открыто.

8. Проверьте, что замкнутый шар в 10-адических (p@-адических) числах открыт.

9. Пусть $A \subset M$ — произвольное подмножество метрического пространства M.

Определения. Точка $x \in A$ называется *внутренней* точкой множества A, если A содержит некоторую окрестность точки x. Точка $x \in M$ называется *граничной* точкой множества A, если любая ее окрестность содержит точку, принадлежащую множеству A, и точку, не принадлежащую множеству A. Множество всех граничных точек множества A называют его *границей* и обозначают ∂A.

10. Верны ли утверждения:

а) Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.

б) Всякая граничная точка множества является его предельной точкой.

в) Любая окрестность граничной точки множества A содержит как внутренние, так и внешние (т. е. внутренние дополнения) точки этого множества.

11. Докажите, что граница ∂A произвольного множества A является замкнутым множеством.

12. Докажите, что кривая, заданная уравнением $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ замкнута, а функция $x^{13}+y^{22}$ достигает на ней максимума.

13. Докажите, что любое открытое множество на прямой есть объединение конечного или счетного набора непересекающихся интервалов.

14. Рассмотрим открытые множества на отрезке $[0,1]$. Длину открытого множества $A = \bigcup_k (a_k, b_k)$ определим формулой

$$l(A) = \sum_k (b_k - a_k).$$

Найдется ли такое открытое множество A, что $l(A) < 1$, содержащее все

а) рациональные б) иррациональные

точки отрезка?

15. Докажите, что множество предельных точек любой последовательности вещественных чисел замкнуто. Более того, всякое замкнутое множество на прямой является множеством предельных точек некоторой последовательности.

16. Докажите, что из любой последовательности точек а) отрезка $[a,b]$, б) сферы $x^2+y^2+z^2=1$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

17. Докажите, что из любого покрытия а) отрезка $[a,b]$, б) сферы $x^2+y^2+z^2=1$ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

18. Верно ли, что любое замкнутое множество на прямой (даже ограниченное) есть объединение конечного или счетного набора непересекающихся отрезков?

Отображение $f : x \mapsto \{1/x\}$ и его свойства

1. Показать, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

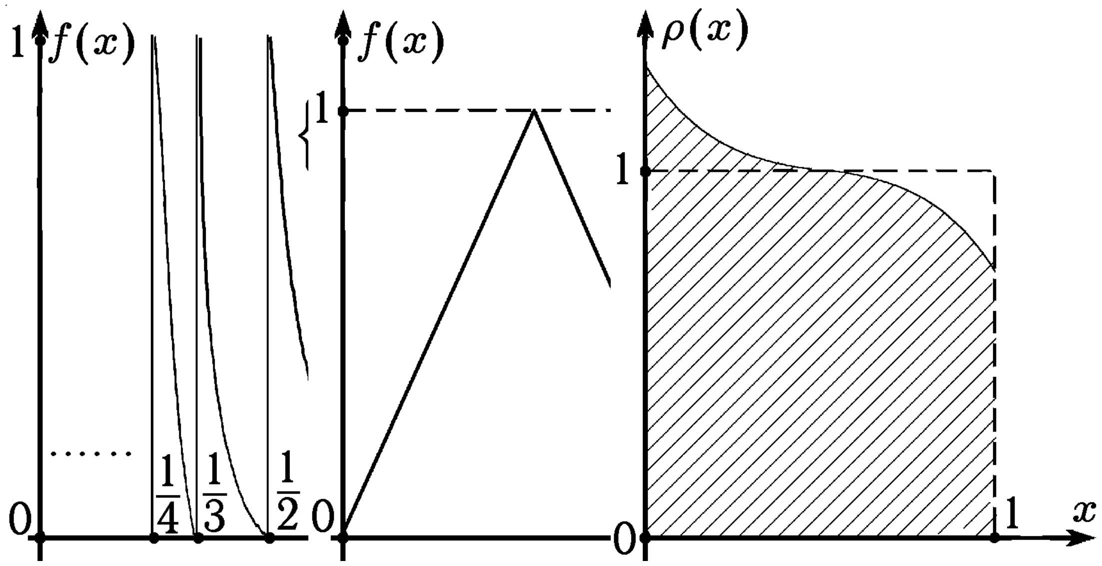
Рассмотрим отображение $f : [0,1] \to [0,1]$, где $f(x) = \{1/x\}$ (рис. 1). Прообраз отрезка $[0,1]$ состоит из счетного числа полуинтервалов $(\frac{1}{2}, 1] \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \cup \dots$ Длина k@-го интервала $\frac{1}{k(k+1)}$, а сумма длин всех интервалов есть длина отрезка $[0,1]$, т. е. 1.

Попробуем найти длину $|f^{-1}([a,b])|$, где $[a,b] \subset [0,1]$. Множество $f^{-1}([a,b])$ состоит из счетного числа отрезков.

2. Показать, что $|f^{-1}([a,b])| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b-a}{(k+a)(k+b)}$.

Для некоторых отображений очень легко искать длины прообразов.

3. а) Показать, что если $g : [0,1] \to [0,1]$, $g(x) = \{mx\}$, $m \in \mathbb{N}$, то $|g^{-1}([a,b])| = |[a,b]|$.



б) Пусть $g : [0,1] \to [0,1]$, $g(x) = 1 - |2x - 1|$ (рис. 2). Показать, что $|g^{-1}([a,b])| = |[a,b]|$. (Это простое отображение играет важную роль в теории динамических систем и даже имеет собственное название: tent map).

Оказывается, что и отображение f обладает подобным свойством, нужно только “правильно” определить, что считать длиной отрезка.

Определение. Пусть $\rho(x)$-положительная, непрерывная функция, причем $\int_0^1 \rho(x)dx = 1$ (будем называть $\rho(x)$ плотностью) (рис. 3). Определим $|[a,b]|_\rho = \int_a^b \rho(x)dx$.

Заметим, что для того, чтобы получить “обычную” длину, надо взять $\rho(x) = 1$.

Теорема (Гаусс). Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \{1/x\}$ (рис. 1). Тогда если $\rho(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}$, то для любого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$ $\quad |f^{-1}([a,b])|_\rho = |[a,b]|_\rho$.

Следствие. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b-a}{(k+a)(k+b)} = |[a,b]|_\rho = \int_a^b (\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x})dx = \frac{1}{\ln 2}\frac{\ln(1+b)}{\ln(1+a)}$.

4. Пусть $h : [0,1] \to [0,1]$-кусочно-линейное отображение, ”похожее” на отображение f, а именно: $h(x) = (k+1)(1-kx)$ при $x \in (\frac{1}{k+1}\frac{1}{k}]$. Найти $|h^{-1}([a,b])|$.