Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 18 октября

Мощность множества

Множество M называется *счетным*, если существует взаимно однозначное соответствие $M \leftrightarrow \mathbb{N}$ (говорят также, что M имеет мощность $\aleph_0$).

1. Докажите, что следующие множества счетные:

множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;

множество $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ n-ок рациональных чисел;

множество слов русского языка, т. е. конечных последовательностей $a_1 a_2 \ldots, \quad a_i \in \{\text{а}, \ldots, \text{я}\}$.

2. Докажите, что следующие множества несчетные:

множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц

$$a_1 a_2 \ldots, \quad a_i \in \{0, 1\}.$$

множество бесконечных последовательностей рациональных чисел;

множество слов русского языка бесконечной длины.

3. Можно ли на плоскости расположить несчетное количество попарно непересекающихся

кругов;

восьмерок (фигур вида ∞);

букв ¡¡Т¿¿;

букв ¡¡ Л¿¿?

4. Может ли функция на прямой иметь более чем счетное множество строгих локальных максимумов?

Говорят, что *множество имеет мощность континуума*, если существует его взаимно однозначное соответствие с множеством $\mathcal{D}^\infty$ бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

5. Докажите следующую *теорему Шредера«««Бернштейна*: если существуют вложения множеств $A \hookrightarrow B$ и $B \hookrightarrow A$ то существует и взаимно однозначное соответствие $A \leftrightarrow B$.

6. Докажите, что следующие множества имеют мощность континуума:

отрезок $[0, 1]$;

множества задачи 2;

пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке;

множество замкнутых подмножеств в а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}^2$.

Открытые и замкнутые множества (продолжение)

Пусть на множестве M заданы две метрики ρ_1 и ρ_2.

Определение. Метрики ρ_1 и ρ_2 называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные числа c_1 и c_2, что для любых точек $x, y \in M$ имеет место неравенство:

$$c_1\rho_1(x,y) \le \rho_2(x,y) \le c_2\rho_1(x,y).$$

7. Доказать, что для эквивалентных метрик совокупности открытых множеств совпадают.

8. Какие свойства функции $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отвечают за то, что

а) множества $f(x) > a, a \in \mathbb{R}$ открыты?

б) множества $f(x) \ge a, a \in \mathbb{R}$ и $f(x) = a, a \in \mathbb{R}$ замкнуты?

9. Верно ли, что любое замкнутое множество на прямой (даже ограниченное) есть объединение конечного или счетного набора непересекающихся отрезков? (Нет, пример доставляет канторово множество, обсуждаемое ниже.)

Пусть $K_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $K_2 = K_1 \setminus \left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right\}$, ...

Множество K_{i+1} получается выкидыванием средней трети каждого отрезка, из которых состоит K_i. *Канторовым множеством* называется пересечение $K = \bigcap K_i$.

11. Покажите, что

множество K замкнуто, ограниченно, не имеет изолированных точек;

точки K находятся во взаимно однозначном соответствии с бесконечными последовательностями, состоящими из нулей и единиц;

K не содержит ни одного отрезка ненулевой длины;

множество K не может быть представлено как объединение конечного или счетного набора непересекающихся отрезков.

12. Докажите, что точка 1/4 принадлежит канторову множеству.

13. Докажите, что множество K содержит множество точек (мощности континуум), которые не являются границами вычитаемых интервалов.

14. Чему равна длина канторова множества? Придумайте (и назовите своим именем) пример множества канторовского типа ненулевой длины.

15. Пусть канторово множество покрыто интервалами. Всегда ли можно выбрать из этого покрытия конечное подпокрытие?