Высший Колледж математики

Математический анализ 1-й курс 25 октября 2000 года

Определение 1. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если $\forall \varepsilon{>}0\ \exists \delta{>}0 :$ $|x-x_0|{<}\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|{<}\varepsilon$. **Определение 2.** Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если для всякой последовательности $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ выполняется $f(x_k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$. **Определение 3.** Функция f называется *непрерывной* (на всей области ее определения), если прообраз всякого открытого подмножества ямой открыт.

1. Докажите, что определения 1–3 эквивалентны.

2. В каких точках непрерывны функции: $\sin\frac{1}{x}$; $x\sin\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}\sin x$; $(-1)^{[1/x]}$; $\frac{1}{[1/x]}$, $\{\frac{1}{x}\}$?

3. Функция определена и непрерывна на прямой. Докажите, что она однозначно задается своими значениями в рациональных точках.

4. Пусть x_0 — точка метрического пространства (X,ρ). Докажите, что функция $x\mapsto \rho(x_0,x)$ на X, заданная расстоянием до выбранной точки, непрерывна.

5. Опишите все непрерывные функции на прямой, удовлетворяющие тождеству

$$\text{а) } \phi(x+y)=\phi(x)\,\phi(y); \qquad \text{б) } \psi(x+y)=\psi(x)+\psi(y).$$

6. Докажите, что ограниченная функция на отрезке непрерывна тогда и только тогда, когда ее график замкнут.

7. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.

8. Приведите пример функции с разрывами во всех рациональных точках и непрерывную в иррациональных а) какой-нибудь; б) монотонной.

9. Приведите пример функции, разрывной в точках канторова множества и только в них.

10. Функция на целых 10-адических числах сопоставляет каждой бесконечной влево последовательности ее второй элемент. Непрерывна ли она?

11. Рассмотрим следующие теоремы о множестве действительных чисел:

    - теорему о существовании точной верхней грани ограниченного множества;
    - теорему о существовании общей точки у системы вложенных отрезков;
    - теорему о существовании у ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности;
    - теорему о существовании у покрытия отрезка интервалами конечного подпокрытия.

    Рассмотрим следующие свойства функции f, непрерывной на отрезке $[a,b]$:

    - функция ограничена;
    - функция достигает своего максимума;
    - если $f(a)<0<f(b)$, то $f(x)=0$ для некоторого $x\in[a,b]$;
    - функция равномерно непрерывна:
      $\forall\varepsilon{>}0\ \exists\delta{>}0 : \forall x,y{\in}[a,b]\ |x-y|{<}\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|{<}\varepsilon$.

а) (Слабая формулировка.) Докажите приведенные свойства непрерывной функции.

б) (Сильная формулировка.) Выведите каждое из приведенных свойств непрерывной функции из каждой приведенной теоремы о действительных числах (этот пункт включает $4 \times 4 = 16$ задач).