Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 1 ноября 2000 года

Определения. Метрическое пространство M называется *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in M$ существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to M$, такое, что $f(0) = a$, $f(1) = b$.

Пространство M называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непересекающихся непустых открытых подмножеств. Иными словами, если единственными подмножествами, являющимися одновременно открытыми и замкнутыми, являются M и $\emptyset$.

1. Докажите, что отрезок является связным и линейно связным.
2. Докажите, что линейно связное пространство связно.
3. Опишите все связные подмножества а) прямой $\mathbb{R}$; б) пространства $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел.
4. Пусть $Ж \subset \mathbb{R}^2$ есть объединение графика функции $y = \sin 1/x$ и отрезка $x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1$. Покажите, что $Ж$ является связным, но не линейно связным пространством.
5. Докажите, что непрерывная функция на связном пространстве принимает все промежуточные значения.
6. Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Имеются следующие три определения компактности (из которых основным является последнее): пространство M *компактно*, если

а) M есть замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$;

б) из любой последовательность точек в M можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;

в) из любого покрытия M открытыми подмножествами можно выбрать конечное подпокрытие.

7. Докажите, что для подмножеств в $\mathbb{R}^n$ все три опреледения равносильны. Докажите, что для любого метрического пространства M в) $\Rightarrow$ б) и в) $\Rightarrow$ M ограничено и замкнуто.
8. Докажите, что непрерывная функция на компактном пространстве

   а) ограниченна;

   б) достигает максимума и минимума;

   в) равномерно непрерывна.
9. Докажите, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.
10. Докажите, что если непрерывное отображение компактного пространства взаимно однозначно, то обратное отображение, заданное на образе исходного, также непрерывно.