1. Векторные расслоения.

1.1. **Проективное пространство и топология Зарисского.** Пусть $V = \mathbb{C}^{n+1}$ — комплексное векторное пространство. Комплексное проективное пространство $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ — это множество одномерных подпространств в V. Проективное пространство $\mathbb{P}^n$ обладает естественной структурой гладкого комплексного (алгебраического) многообразия.

А именно, пусть $\{z_0, \dots, z_n\}$ — базис пространства V^*. Тогда всякая точка проективного пространства P определяется своими однородными координатами $(z_0(P) : \dots : z_n(P))$. Однородные координаты определены с точностью до одновременного умножения на ненулевое число. Рассмотрим подмножество $U_i = \{P \in \mathbb{P}(V) \mid z_i(P) \neq 0\} \subset \mathbb{P}(V)$. Отображение

$$(z_0 : \dots : z_n) \quad \mapsto \quad \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

задает изоморфизм $\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$. Более того, легко видеть, что $\phi_i(U_i \cap U_j) = \mathbb{A}^n - \mathbb{A}^{n-1}$ и функции перехода $\phi_j \cdot \phi_i^{-1} : \mathbb{A}^n - \mathbb{A}^{n-1} \to \mathbb{A}^n - \mathbb{A}^{n-1}$ голоморфны (и даже рациональны). Значит открытые подмножества $U_0, \dots, U_n$ образуют открытое покрытие проективного пространства $\mathbb{P}^n$. Будем называть такое покрытие стандартным.

В алгебраической геометрии проективное пространство $\mathbb{P}^n$ снабжают топологией Зарисского. Стандартную топологию принято называть аналитической.

Определение. Подмножество $X \subset \mathbb{P}^n$ называется замкнутым по Зарисскому, если существуют однородные многочлены $F_1, \dots, F_r$ от $z_0, \dots, z_n$, такие что

$$X = \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n \mid F_1(z_0, \dots, z_n) = \dots = F_r(z_0, \dots, z_n) = 0\}.$$

Упражнение 1.1. Проверьте, что замкнутые по Зарисскому множества порождают топологию.

Определение. Проективным многообразием будем называть замкнутое по Зарисскому подмножество проективного пространства. Алгебраическим многообразием мы будем называть любое квазипроективное многообразие, то есть открытое (по Зарисскому) подмножество проективного многообразия. Алгебраическое многообразие называется аффинным, если оно изоморфно замкнутому подмножеству аффинного пространства.

1.2. **Векторные расслоения.**

Определение. Векторное расслоение ранга r на алегбраическом многообразии X — это пара (E, π_E), где E — алгебраическое многообразие, а $\pi_E : E \to X$ — голоморфное отображение, такие что всякая точка $x \in X$ обладает окрестностью (в топологии Зарисского) U_x и тривиализацией $\phi_x : U_x \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} \pi_E^{-1}(U_x)$, так что отображение

$$(U_x \cap U_y) \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\phi_x} \pi_E^{-1}(U_x \cap U_y) \xrightarrow{\phi_y^{-1}} (U_x \cap U_y) \times \mathbb{C}^r$$

имеет вид $\phi_y^{-1} \cdot \phi_x(z, v) = (z, g_{yx}(z)v)$, где $g_{yx} : U_x \cap U_y \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ — алгебраическое отображение.

Ранг расслоеня E обозначается $r(E)$.

Векторное расслоение можно задавать с помощью коцикла. Пусть $U_\bullet$ — открытое покрытие многообразия X. Коциклом (r-мерным) относительно покрытия $U_\bullet$ называется набор алгебраических отображений $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, таких что

$$g_{ij} \cdot g_{ji} = 1, \qquad g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}. \tag{1.2}$$

Коциклы g и g' называются эквивалентными, если существуют алгебраические отображения $h_i : U_i \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, такие что

$$g'_{ij} = h_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot h_j.$$

Упражнение 1.3. Покажите, что множество классов изоморфизма векторных расслоений ранга r на многообразии X находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности r-мерных коциклов.

Замечание. Строго говоря, надо расширить понятие эквивалентности коциклов, чтобы можно было говорить об эквивалентности коциклов, определенных относительно разных покрытий.

Определение. Векторное расслоение ранга 1 называется линейным расслоением.

1.3. **Линейные расслоения на $\mathbb{P}^n$.** Будем искать одномерные коциклы на $\mathbb{P}^n$ относительно стандартного покрытия $U_0, \dots, U_n$. Одномерный коцикл это набор функций $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ нигде не обращающихся в нуль.

Упражнение 1.4. Покажите, что всякая не обращающаяся в нуль алгебраическая функция на $U_i \cap U_j$ имеет вид $\lambda(z_j/z_i)^k$.

Значит коцикл имеет вид $g_{ij} = \lambda_{ij} \left(z_j/z_i\right)^{k_{ij}}$.

Упражнение 1.5. **(1)** Покажите, что из условия коцикла (1.2) следует $k_{ij} = k$ для всех i, j и $\lambda_{ij}\lambda_{jk} = \lambda_{ik}$ для всех i, j, k. **(2)** Покажите, что коцикл g эквивалентен коциклу

$$g_{ij}^{(k)} = \left(z_j/z_i\right)^k. \tag{1.6}$$

Определение. Линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$, заданное в стандартном покрытии коциклом (1.6) называется $\mathcal{O}(k)$.

Ясно, что расслоение $\mathcal{O} := \mathcal{O}(0)$ — тривиальное линейное расслоение.

Упражнение 1.7. **(1)** Пусть $E \subset \mathbb{P}(V) \times V$, $E = \{(L, v) \mid v \in L\}$ (здесь $L \in \mathbb{P}(V)$ рассматривается как одномерное подпространство в V), и $\pi_E(L, v) = L$. Покажите, что E — линейное расслоение на $\mathbb{P}(V)$. Расслоение E называется тавтологическим подрасслоением на $\mathbb{P}(V)$. **(2)** Покажите, что $E \cong \mathcal{O}(-1)$.

На самом деле можно доказать следующее.

Теорема 1.8. *Всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$ имеет вид $\mathcal{O}(k)$.*

1.4. **Функторы.** Векторное расслоение на многообразии X можно себе представлять как семейство векторных пространств, параметризованное точками многообразия X. Соответсвенно, операции и функторы определенные для векторных пространств часто можно послойно применять к векторным расслоениям.

Упражнение 1.9. Пусть E и E' — векторные расслоения на X. **(1)** Определите двойственное расслоение E^*, а также расслоения $E \oplus E'$ и $E \otimes E'$. **(2)** Покажите, что $r(E^*) = r$, $r(E \oplus E') = r(E) + r(E')$ и $r(E \otimes E') = r(E)r(E')$. **(3)** Пусть расслоения E и E' задаются коциклами g и g'. Покажите, что E^*, $E \oplus E'$ и $E \otimes E'$ задаются коциклами $(g^{-1})^T$, $g \oplus g'$ и $g \otimes g'$.

Упражнение 1.10. **(1)** Покажите, что если $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ — линейные расслоения, то $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O} \cong \mathcal{L}$, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}$. **(2)** Проверьте, что множество классов изоморфизма линейных расслоений на X является абелевой группой относительно операции $\otimes$. Эта группа называется группой Пикара многообразия X и обозначается $\operatorname{Pic} X$. **(3)** Докажите, что если $X = \mathbb{P}^n$, то $\mathcal{O}(k)^* \cong \mathcal{O}(-k)$, $\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l) \cong \mathcal{O}(k+l)$. Таким образом, $\operatorname{Pic} \mathbb{P}^n = \mathbb{Z}$.

Пусть E и F — векторные расслоения на X. Отображение $f : E \to F$ называется гомоморфизмом векторных расслоений, если $\pi_F \cdot f = \pi_E$ и для любых тривиализаций $\phi_E : U \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} \pi_E^{-1}(U)$, $\phi_F : U \times \mathbb{C}^s \xrightarrow{\sim} \pi_F^{-1}(U)$ имеем

$$\phi_F^{-1} \cdot f \cdot \phi_E(x, v) = (x, f_U(x)v),$$

где f_U — алгебраическое отображение $U \to \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$. Легко видеть, что множество $\operatorname{Hom}(E, F)$ гомоморфизмов из E в F является векторным пространством относительно послойного сложения и умножения на число.

Сечением расслоения E над множеством $U \subset X$ называется алгебраическое отображение $s : U \to \pi_E^{-1}(U)$, такое что $\pi_E \cdot s = \mathrm{id}_U$. Множество $\Gamma(U, E)$ сечений E над U является векторным пространством относительно послойного сложения и умножения на число.

Упражнение 1.11. **(1)** Докажите изоморфизмы функторов

$$\Gamma(X, E) \cong \operatorname{Hom}(X, E), \qquad \operatorname{Hom}(E, F \otimes G) \cong \operatorname{Hom}(E \otimes F^*, G).$$

(2) Пусть E и F заданы коциклами g и g'. Докажите, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(E, F) &= \{(f_i : U_i \to \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{r(E)}, \mathbb{C}^{r(F)})) \mid f_i = g'_{ij} \cdot f_j \cdot g_{ij}^{-1}\}, \\ \Gamma(X, E) &= \{(s_i : U_i \to \mathbb{C}^{r(E)}) \mid s_i = g_{ij} \cdot s_j\}. \end{aligned}$$

Последовательность векторных расслоений и их гомоморфизмов

$$\dots E_{i-1} \to E_i \to E_{i+1} \to \dots$$

называется комплексом (точной последовательностью), если она является таковой послойно.

1.5. **Производные функторы.** Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ — абелевы категории. Ковариантный функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ называется точным слева (справа), если для всякой точной последовательности $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ в категории $\mathcal{A}$ последовательность $0 \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to 0$ в категории $\mathcal{A}'$ точна везде, кроме правого (соответственно левого) члена. Функтор точный справа и слева одновременно называется точным. Аналогично определяется точные (слева, справа) контравариантные функторы.

Упражнение 1.12. **(1)** Проверьте, что $\Gamma(X, -)$, $\operatorname{Hom}(E, -)$, $\operatorname{Hom}(-, E)$ — точные слева функторы из категории векторных расслоений в категорию векторных пространств. **(2)** Докажите, что функторы $E \mapsto E^*$ и $E \mapsto E \otimes F$ — точные функторы из категории векторных расслоений в себя.

Замечание. Категория векторных расслоений не является абелевой, однако понятие точной последовательности в ней определено, поэтому понятие точности функтора имеет смысл.

Функторы Γ и Hom вообще говоря не являются точными справа. Однако важным фактом является следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1.13. *Если X — аффинное многообразие, то функтор $\Gamma(X, -)$ точен.*

Если $\mathcal{A}$ — "хорошая" абелева категория, а F — точный слева функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, то существует единственная с точностью до функториального изоморфизма последовательность функторов $R^0F = F$, R^1F, R^2F, $\dots$ из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, таких что для всякой короткой точной последовательности

$$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$$

в категории $\mathcal{A}$ возникает длинная точная последовательность

$$0 \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to R^1F(A_1) \to R^1F(A_2) \to R^1F(A_3) \to \dots$$

Аналогично, для точного справа функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ существует единственная с точностью до функториального изоморфизма последовательность функторов $L^0F = F$, L^1F, L^2F, $\dots$ таких что для всякой короткой точной последовательности в категории $\mathcal{A}$ возникает длинная точная последовательность

$$\dots \to L^1F(A_1) \to L^1F(A_2) \to L^1F(A_3) \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to 0.$$

Функтор R^iF (соотв. L^iF) называется i-ым правым (соотв. левым) производным функтором от функтора F.

Упражнение 1.14. Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $G : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$. Докажите, что если F — точен, а G — точен слева, то

$$R^i(G \cdot F) = (R^iG) \cdot F$$

Докажите аналогичные утверждение в случаях, когда F — точен, а G — точен справа, а также когда G — точен, а F — точен слева или справа.

Позже мы вложим категорию векторных расслоений в хорошую абелеву категорию — категорию когерентных пучков. Пока же нам достаточно знать существование такого вложения, чтобы иметь возможность говорить о производных функторах от функторов, определенных на категории векторных расслоений.

Определение. Обозначим через $\mathrm{H}^i(X, -)$ i-ый правый производный функтор от функтора $\Gamma(X, -)$. Функтор $\mathrm{H}^i(X, -)$ называется функтором i-ых **когомологий**. Заметим, что по определению $\mathrm{H}^0(X, E) = \Gamma(X, E)$.

Аналогично, i-ый правый производный функтор от функтора Hom обозначается Ext^i. Таким образом, $\mathrm{Ext}^0(E, F) = \mathrm{Hom}(E, F)$.

Из теоремы 1.13 легко вытекает

Теорема 1.15. *Если X — аффинное многообразие, то $\mathrm{H}^{>0}(X, -) = 0$.*

Замечание. Приведенное выше определение функтора Ext^i не вполне корректно, так как в нем не указано, по какому аргументу берется производный функтор. Однако, следующее упражнение показывает, что оба способа дают один и тот же ответ.

Упражнение 1.16. Пусть
$$\mathrm{Ext}^i(E, -) = R^i\,\mathrm{Hom}(E, -), \qquad \mathrm{Ext}'^i(-, F) = R^i\,\mathrm{Hom}(-, F).$$
Докажите изоморфизм функторов
$$\mathrm{Ext}^i(E, F) \cong \mathrm{H}^i(X, E^* \otimes F) \cong \mathrm{Ext}'^i(E, F).$$
(Указание: воспользуйтесь Упр. 1.14) Таким образом, вычисление функтора Ext для расслоений сводится к вычислению когомологий.

1.6. **Комплекс Чеха.** Пусть E — векторное расслоение на многообразии X и $X = \bigcup_{i=0}^N U_i$ — открытое покрытие. Рассмотрим последовательность векторных пространств
$$0 \to \mathcal{C}^0_E(U_\bullet) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1_E(U_\bullet) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2_E(U_\bullet) \xrightarrow{d} \dots,$$
где
$$\mathcal{C}^p_E(U_\bullet) = \bigoplus_{0 \le i_0 < \dots < i_p \le N} \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, E),$$
и для всякого $s = (s_{i_0,\dots,i_p}) \in \mathcal{C}^p_E(U_\bullet)$ положим
$$(ds)_{i_0,\dots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (s_{i_0,\dots,\widehat{i_k},\dots,i_{p+1}})_{|U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}}.$$

Упражнение 1.17. **(1)** Проверьте, что $d^2 = 0$. **(2)** Покажите, что
$$\mathrm{Ker}(\mathcal{C}^0_E(U_\bullet) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1_E(U_\bullet)) = \Gamma(X, E).$$

Согласно Упр. 1.17 (1) последовательность $\mathcal{C}^\bullet_E(U_\bullet)$ является комплексом. Комплекс $\mathcal{C}^\bullet_E(U_\bullet)$ называется комплексом Чеха расслоения E относительно покрытия $U_\bullet$. Когомологии комплекса Чеха называются когомологиями Чеха расслоения E относительно покрытия $U_\bullet$ и обозначаются $\check{\mathrm{H}}^p(U_\bullet, E) = \mathrm{H}^p(\mathcal{C}^\bullet_E(U_\bullet))$.

Теорема 1.18. *Если все множества U_i являются аффинными, то когомологии Чеха совпадают с обычными когомологиями*
$$\mathrm{H}^p(X, E) = \check{\mathrm{H}}^p(U_\bullet, E).$$

Набросок доказательства: По Упр. 1.17 (2) имеем $\mathrm{H}^0(X, E) = \check{\mathrm{H}}^0(U_\bullet, E)$. Поэтому по существу достаточно проверить, что для всякой короткой точной последовательности расслоений
$$0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$$
возникает длинная точная последовательность когомологий Чеха. Заметим, что морфизмы $E_i \to E_{i+1}$ индуцируют морфизмы комплексов Чеха $\mathcal{C}^\bullet_{E_i}(U_\bullet) \to \mathcal{C}^\bullet_{E_{i+1}}(U_\bullet)$. Далее, если все U_i аффинны, то и всякое пересечение $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ — аффинно, значит по теореме 1.13 последовательность
$$0 \to \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, E_1) \to \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, E_2) \to \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, E_3) \to 0$$
точна. Следовательно, мы имеем точную последовательность комплексов
$$0 \to \mathcal{C}^\bullet_{E_1}(U_\bullet) \to \mathcal{C}^\bullet_{E_2}(U_\bullet) \to \mathcal{C}^\bullet_{E_3}(U_\bullet) \to 0$$
и “лемма о змее” дает длинную точную последовательность когомологий Чеха. $\square$