10. Равномерное неоднородное расслоение.

10.1. **Нормальное расслоение.** Пусть X — гладкое многообразие и $Y \subset X$ — гладкое подмногообразие. Для всякой точки $y \in Y$ касательное пространство T_yY вложено в касательное пространство T_yX. Тем самым имеется вложение расслоений $T_Y \subset T_{X|Y}$. Факторрасслоение называется **нормальным расслоением** и обозначается $\mathcal{N}_{Y/X}$. Таким образом, по определению имеется точная последовательность

$$0 \to T_Y \to T_{X|Y} \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0.$$

Эта последовательность очень полезна в связи с тем, что нормальное расслоение часто легко описать.

Упражнение 10.1. Пусть $U_\bullet$ — покрытие подмногообразия $Y \subset X$. Пусть $z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}$ — координаты в U_i, такие что $Y \cap U_i = \{z_1^{(i)} = \dots = z_r^{(i)} = 0\}$. Докажите, что матрицы $g_{ij} \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_Y(Y \cap U_i \cap U_j))$ с матричными элементами $(g_{ij})_{pq} = (\partial z_p^{(i)} / \partial z_q^{(j)})_{|Y}$ определяют коцикл нормального расслоения $\mathcal{N}_{Y/X}$.

Теорема 10.2. *Пусть $Y = \{s = 0\}$ — множество нулей регулярного сечения расслоения E. Тогда $\mathcal{N}_{Y/X} = E_{|Y}$.*

Доказательство: Нам надо построить сюрьективный гомоморфизм $T_{X|Y} \to E_{|Y}$. Сделаем это так. Возьмем произвольное сечение ξ пучка $T_{X|Y}$. Затем поднимем его (локально) до сечения пучка $\tilde{\xi} \in T_X(U)$. Выберем локальную тривиализацию расслоения $E(U) \cong \mathcal{O}_X(U)^r$ и разложим сечение s по базису сечений $s = (f_1, \dots, f_r)$. Вычислим производную сечения s вдоль векторного поля $\tilde{\xi}$:

$$\tilde{\xi}(s) = (\tilde{\xi}(f_1), \dots, \tilde{\xi}(f_r)).$$

И, наконец, ограничим сечение $\tilde{\xi}(s)$ на Y. Таким образом определяется отображение из сечений пучка $T_{X|Y}$ в сечения пучка $E_{|Y}$. Обозначим построенный морфизм через $\mathrm{d}s$.

Теперь мы должны показать, что отображение $\mathrm{d}s$ не зависит от произвола, допущенного при его построении, и что оно является гомоморфизм $\mathcal{O}_X(U)$-модулей. Затем надо проверить, что полученная последовательность

$$0 \to T_Y \to T_{X|Y} \xrightarrow{\mathrm{d}s} E_{|Y} \to 0 \tag{10.3}$$

точна. Прежде чем все это проверять, докажем лемму.

Лемма 10.4. *Если $\bar{\xi}$ — векторное поле на X, которое касается подмногообразия Y, то $\bar{\xi}(s)_{|Y} = 0$.*

Доказательство: Действительно, $s_{|Y} = 0$, поэтому $\bar{\xi}(s)_{|Y} = (\bar{\xi}_{|Y})(s_{|Y}) = 0$. □

Пусть теперь $\tilde{\xi}'$ — другое поднятие ξ. Тогда ясно, что векторное поле $\bar{\xi} = \tilde{\xi}' - \tilde{\xi}$ равно нулю на Y. В частности, оно касается Y, поэтому по лемме 10.4 имеем $\bar{\xi}(s)_{|Y} = 0$, следовательно $\tilde{\xi}'(s)_{|Y} = \tilde{\xi}(s)_{|Y}$.

Допустим теперь, что мы заменили тривиализацию расслоения E. Пусть $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X(U))$ — матрица замены базиса. Пусть $(f_1', \dots, f_r')$ — разложение сечения s относительно нового базиса. Тогда

$$f_i' = \sum_{j=1}^{r} g_{ij} f_j \qquad \forall 1 \le i \le r.$$

Применяя $\tilde{\xi}(-)$ и пользуясь правилом Лейбница получаем

$$\tilde{\xi}(f'_i) = \sum_{j=1}^{r} g_{ij}\tilde{\xi}(f_j) + \sum_{j=1}^{r} f_j\tilde{\xi}(g_{ij}).$$

Заметим, что второе слагаемое при ограничении на Y зануляется. Это значит, что набор $(\tilde{\xi}(f'_1),\dots,\tilde{\xi}(f'_r))_{|Y}$ отличается от набора $(\tilde{\xi}(f_1),\dots,\tilde{\xi}(f_r))_{|Y}$ умножением на матрицу g, следовательно задает то же сечение расслоения $E_{|Y}$.

Тот факт, что $\mathrm{d}s$ является гомоморфизмом $\mathcal{O}_X(U)$-модулей легко следует из того, что производная функции вдоль векторного поля коммутирует с умножением векторного поля на функции.

Пусть теперь ξ — сечение пучка T_Y. Тогда его поднятие $\tilde{\xi}$ будет касаться подмногообразия Y, следовательно по лемме 10.4 получим $\tilde{\xi}(s)_{|Y} = 0$. Значит T_Y содержится в ядре построенного морфизма.

Остается доказать точность последовательности (10.3). Это можно делать локально. Выберем (аналитически) локальную систему координат $z_1,\dots,z_n$, так чтобы подмногообразие Y задавалось бы уравнениями $z_1 = \dots = z_r = 0$. Ясно, что отображение $\mathrm{d}s$ переводит сечение $\sum_{i=1}^{n}\phi_i\partial_{z_i} \in T_{X|Y}(U)$ в сечение

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\phi_i\partial_{z_i}(z_1),\dots,\sum_{i=1}^{n}\phi_i\partial_{z_i}(z_r)\right) = (\phi_1,\dots,\phi_r) \in E_{|Y}(U).$$

Отсюда сразу следует, что $\mathrm{d}s$ сюрьективно, и что

$$\operatorname{Ker}\mathrm{d}s = \left\langle \sum_{i=r+1}^{n}\phi_i\partial_{z_i}\right\rangle = T_Y(U).$$

На этом доказательство теоремы заканчивается. □

Пример 10.5. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ — проективное пространство, а $Y = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$. Ясно, что $Y = \{s = 0\}$, где

$$s \in \Gamma(\mathbb{P}(V), V/W \otimes \mathcal{O}(1)) = V/W \otimes V^* = \operatorname{Hom}(V, V/W)$$

сечение, соответствующее проекции $V \to V/W$. Отсюда получаем

$$\mathcal{N}_{\mathbb{P}(W)/\mathbb{P}(V)} = V/W \otimes \mathcal{O}(1).$$

Упражнение 10.6. Пусть $\omega_X = \det\Omega_X$ — каноническое линейное расслоение на многообразии X. Пусть $Y = \{s = 0\} \subset X$, где $s \in \Gamma(X, E)$ — регулярное сечение. Докажите формулу присоединения:

$$\omega_Y \cong (\omega_X \otimes \det E)_{|Y}.$$

10.2. **Степень однородности.** Прежде чем приступить к конструкции введем полезные определения.

Определение. Расслоение E на пространстве $\mathbb{P}^n$ называется k-однородным, если для любых линейных вложений $\phi_{1,2} : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^n$ имеем $\phi_1^*E \cong \phi_2^*E$.

Очевидно, что расслоение E равномерно тогда и только тогда, когда оно 1-однородно. Кроме того, ясно, что всякое однородное расслоение является n-однородным.

Замечание. Определения однородности и n-однородности вообще говоря не эквивалентны. В определении однородности требуется выбор конкретного изоорфизма, причем так, чтобы изоморфизмы были некоторым образом согласованы.

Ясно, что если расслоение k-однородно, то оно и $(k-1)$-однородно. Назовем **степенью однородности** расслоения E число $h(E) = \max\{k \mid E$ — k-однородно$\}$.

Упражнение 10.7. Покажите, что если $r(E) < n$, то $h(E)$ равно 0 или n.

Нашей целью будет построение расслоения E с $h(E) = 1$. Такое расслоение автоматически будет равномерным, но неоднородным.

10.3. **Конструкция расслоения.** Пусть $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Возьмем произвольное $1 \le m \le n-1$. Выберем $(m+1)$-мерное подпространство $W_0 \subset V$. Из точной последовательности Эйлера следует, что $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), T(-1)) = V$, поэтому вложение $W_0 \subset V$ дает сечение расслоения $W_0^* \otimes T(-1)$ или, иначе говоря, морфизм $f : \mathcal{O} \to W_0^* \otimes T(-1)$.

Лемма 10.8. *При* $\dim W_0 \ge 2$ *морфизм* f *является вложением расслоений.*

Доказательство: Возьмем произвольную точку $v \in \mathbb{P}(V)$. Нам надо проверить, что f не обращается в нуль в точке v. Однако ясно, что значение f в точке v — это композиция $W_0 \to V \to V/v$, рассматриваемая как вектор в пространстве $W_0^* \otimes V/v = W_0^* \otimes T(-1)_v$. Но при $\dim W_0 \ge 2$ такая композиция не равна тождественно нулю, что и требовалось. $\square$

Из доказанной леммы следует, что факторпучок E локально свободен. Таким образом, мы получаем точную последовательность расслоений

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{f} W_0^* \otimes T(-1) \to E \to 0. \tag{10.9}$$

Выберем произвольное подпространство $W \subset V$. Изучим ограничения расслоения E на $\mathbb{P}(W)$. Тут возможны два случая: $W_0 \subset W$ и $W_0 \not\subset W$.

Лемма 10.10. *Если* $W_0 \not\subset W$, $\dim W = k+1$, *то*

$$E_{|\mathbb{P}(W)} \cong \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1} \oplus W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(W)}(-1).$$

В этом случае $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = 0$.

Доказательство: Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to T_{\mathbb{P}(W)} \to T_{\mathbb{P}(V)|\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{N}_{\mathbb{P}(W)/\mathbb{P}(V)} \to 0.$$

Домножим ее на W_0^*, подкрутим на $\mathcal{O}(-1)$ и воспользуемся изоморфизмом $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(W)/\mathbb{P}(V)} \cong V/W \otimes \mathcal{O}(1)$. Получится последовательность

$$0 \to W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)} \to W_0^* \otimes V/W \otimes \mathcal{O} \to 0. \tag{10.11}$$

Заметим, что композиция морфизма $f_{|\mathbb{P}(W)}$ и проекции $W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)} \to W_0^* \otimes V/W \otimes \mathcal{O}$ — это морфизм $f' : \mathcal{O} \to W_0^* \otimes V/W \otimes \mathcal{O}$, заданный вектором в пространстве $W_0^* \otimes V/W$, соответствующим отображению $W_0 \to V \to V/W$. При $W_0 \not\subset W$ этот вектор не равен нулю, поэтому f' не равен нулю. Поэтому последовательность (10.11) вместе с последовательностью (10.9), ограниченной на $\mathbb{P}(W)$, дают коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)} & = & W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{f} & W_0^*\otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & E_{|\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{f'} & W_0^*\otimes V/W\otimes\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Правый столбец диаграммы показывает, что расслоение $E_{|\mathbb{P}(W)}$ является расширением расслоения $\mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1}$ с помощью расслоения $W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)}$. Однако, $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), T(-1)_{\mathbb{P}(W)}) = 0$, поэтому

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1}, W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)}) = 0,$$

следовательно $E_{|\mathbb{P}(W)} \cong \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1}\oplus W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)}$. Остается заметить, что $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1}\oplus W_0^*\otimes\Omega(1)_{\mathbb{P}(W)}) = 0$. $\square$

Лемма 10.12. *Если* $W_0\subset W$, $\dim W = k+1$, *то* $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = \mathbb{C}$.

Доказательство: Будем делать то же самое, что и при доказательстве предыдущей леммы. Первое различие возникнет при вычислении морфизма f'. На этот раз $W_0\subset W$, поэтому композиция $W_0\to V\to V/W$ равна нулю, значит $f' = 0$. Это означает, что морфизм $f : \mathcal{O}\to W_0^*\otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)}$ можно поднять до морфизма $f'' : \mathcal{O}\to W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)}$. Соответственно, последовательность (10.11) вместе с последовательностью (10.9), ограниченной на $\mathbb{P}(W)$, дают следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{f''} & W_0^*\otimes T(-1)_{\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{f} & W_0^*\otimes T_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{|\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & E_{|\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & W_0^*\otimes V/W\otimes\mathcal{O} & = & W_0^*\otimes V/W\otimes\mathcal{O} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Дуализируя правый столбец диаграммы получаем

$$0 \to W_0 \otimes (V/W)^* \otimes \mathcal{O} \to E^*_{|\mathbb{P}(W)} \to F^* \to 0.$$

Применяя функтор $\Gamma(\mathbb{P}(W), -)$ и пользуясь тем, что $\mathrm{H}^{>0}(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}) = 0$, получаем

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), F^*).$$

Дуализируя верхнюю строчку диаграммы получаем

$$0 \to F^* \to W_0 \otimes \Omega(1)_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O} \to 0.$$

Применяя функтор $\Gamma(\mathbb{P}(W), -)$ и пользуясь тем, что $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}(W), \Omega(1)) = 0$, получаем

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), F^*) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}) = \mathbb{C}.$$

и лемма следует. □

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 10.13. *Если $n \geq 2$, а $1 \leq m \leq n-1$, то степень однородности $h(E)$ расслоения E равна $m-1$.*

Доказательство: Нам надо показать, что при $\dim W \leq m$ класс изоморфизма расслоения $E_{|\mathbb{P}(W)}$ зависит только от $\dim W$, а при $\dim W = m+1$ класс изоморфизма расслоения $E_{|\mathbb{P}(W)}$ уже существенно зависит от самого подпространства W.

Первое очевидно следует из леммы 10.10. Действительно, при $\dim W \leq m$ у нас заведомо $W_0 \not\subset W$, поэтому $E_{|\mathbb{P}(W)} \cong \mathcal{O}^{(m+1)(n-k)-1} \oplus W_0^* \otimes T_{\mathbb{P}(W)}(-1)$.

Пусть теперь $\dim W = m+1$. Так как $m < n$, то существует подпространство $W \subset V$, такое что $W_0 \not\subset W$. Тогда по лемме 10.10 имеем

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W), E^*_{|\mathbb{P}(W)}) = 0,$$

в то время как по лемме 10.12 имеем

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}(W_0), E^*_{|\mathbb{P}(W_0)}) = \mathbb{C}.$$

Тем самым $E_{|\mathbb{P}(W)} \ncong E_{|\mathbb{P}(W_0)}$. □

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что при $n \geq 3$, $m = 2$ мы построили расслоение E ранга $(m+1)n - 1 = 3n - 1$ на $\mathbb{P}^n$, которое имеет степень однородности 1. В частности, оно равномерно, но неоднородно.