# 11. Расслоения ранга 2.

## 11.1. Локально полные пересечения.

**Определение.** Подмногообразие $Y$ коразмерности $r$ называется локально полным пересечением, если любая точка $y \in Y$ обладает окрестностью $y \in U \subset X$, такой что $Y \cap U$ задается набором из $r$ уравнений, то есть если найдутся $r$ функции $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_X(U)$, такие что $Y \cap U = \{f_1 = \dots = f_r = 0\}$.

**Упражнение 11.1.** Пусть $Y = \{s = 0\}$, где $s \in \Gamma(X, E)$ — регулярное сечение. Докажите, что $Y$ — локально полное пересечение.

**Определение.** Подмногообразие $Y$ коразмерности $r$ называется глобально полным пересечением, или просто полным пересечением, если найдутся $r$ линейных расслоений $L_1, \dots, L_r$ и $r$ сечений функции $s_1 \in \Gamma(X, L_1), \dots, s_r \in \mathcal{O}_X(U)$, такие что $Y = \{s_1 = \dots = s_r = 0\}$.

Ясно, что всякое полное пересечение является локально полным пересечением. Обратное, вообще говоря, не верно. Простейший пример — тройка точек в $\mathbb{P}^2$, не лежащих на одной прямой.

**Упражнение 11.2.** Покажите, что набор из $m$ различных точек плоскости $\mathbb{P}^2$ всегда является локально полным пересечением. Опишите, когда он является глобально полным пересечением.

**Теорема 11.3.** *Всякое гладкое подмногообразие $Y$ в гладком многообразии $X$ является локально полным пересечением.*

**Доказательство:** Ограничимся аналитической ситуацией. Здесь все сводится к очевидному утверждению о том, что всякое гладкое подмногообразие коразмерности $r$ в $\mathbb{C}^n$ можно локально задать $r$ уравнениями. □

Важнейшим свойством локально полных пересечений является следующая теорема.

**Теорема 11.4.** *Пусть $i : Y \subset X$ — локально полное пересечение. Тогда*

$$\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong \begin{cases} i_* \det \mathcal{N}_{Y/X}, & \text{при } p = \operatorname{codim} Y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Доказательство:** Мы докажем теорему в аналитической ситуации. Пусть $\operatorname{codim} Y = r$, $\dim X = n$. Возьмем произвольную точку $y \in Y$ и выберем в окрестности точки $y$ на $X$ аналитические координаты $z_1, \dots, z_n$, так что $Y = \{z_1 = \dots = z_r = 0\}$. Это означает, что $Y$ является множеством нулей сечения $s = (z_1, \dots, z_r)$ тривиального расслоения $W \otimes \mathcal{O}_X$, где $W = \langle z_1, \dots, z_r \rangle$. Следовательно, пучок $i_*\mathcal{O}_Y$ обладает резольвентой Кошуля

$$0 \to \Lambda^r W^* \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \Lambda^{r-1} W^* \otimes \mathcal{O}_X \to \dots \to W^* \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0. \tag{11.5}$$

Применяя функтор $\mathcal{H}om( - , \mathcal{O})$ получаем комплекс

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} W \otimes \mathcal{O}_X \to \dots \to \Lambda^{r-1} W \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \Lambda^r W \otimes \mathcal{O}_X \to 0, \tag{11.6}$$

когомологии которого равны $\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$. Однако, легко видеть, что комплекс (11.6) изоморфен комплексу (11.5) умноженному на $\det(W\otimes\mathcal{O}_X)$. Поэтому из точности комплекса (11.5) следует, что

$$\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong \begin{cases} i_*\det(W\otimes\mathcal{O}_Y), & \text{при } p=r \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Посмотрим теперь, что происходит при замене локальных координат. Пусть $z_1',\dots,z_n'$ — другие локальные координаты, такие что $Y=\{z_1'=\dots=z_r'=0\}$. Пусть $W'=\langle z_1',\dots,z_r'\rangle$, $s'=(z_1',\dots,z_r')$ — сечение расслоения $W'\otimes\mathcal{O}_X$ и

$$0\to\Lambda^r(W')^*\otimes\mathcal{O}_X\xrightarrow{s}\Lambda^{r-1}(W')^*\otimes\mathcal{O}_X\to\dots\to(W')^*\otimes\mathcal{O}_X\xrightarrow{s}\mathcal{O}_X\to i_*\mathcal{O}_Y\to 0 \tag{11.5$'$}$$

соответствующий комплекс Кошуля. Заметим, что так как $\{z_1'=\dots=z_r'=0\}=\{z_1=\dots=z_r=0\}$ следует, что существует такая матрица $\phi\in\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X)$, такая что

$$z_i'=\sum_{j=1}^r\phi_{ij}(z_1,\dots,z_n)z_j.$$

Рассмотрим $\phi$ как изоморфизм $W\otimes\mathcal{O}_X\to W'\otimes\mathcal{O}_X$. Легко видеть, что набор $(\Lambda^r\phi^*,\Lambda^{r-1}\phi^*,\dots,\phi^*,1)$ задает изоморфизм комплекса $(11.5')$ с комплексом (11.5). Поэтому при переходе к новым координатам тривиализация расслоения $i^*\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_X)$ изменяется посредством умножения на $(\det\phi)_{|Y}$.

Заметим теперь, что

$$\partial z_i'/\partial z_j=\phi_{ij}+\sum_{k=1}^r(\partial\phi_{ik}/\partial z_j)z_k,$$

следовательно $(\partial z_i'/\partial z_j)_{|Y}=\phi_{ij|Y}$. Это означает, что $(\det\phi)_{|Y}$ совпадает с ограничением на $Y$ якобиана $\det(\partial z_i'/\partial z_j)$, который по Упр. 10.1 является функцией перехода для детерминанта нормального расслоения. Следовательно, расслоения $i^*\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_X)$ и $\det\mathcal{N}_{Y/X}$ задаются одинаковыми коциклами, и значит $\mathcal{E}xt^p(i_*\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_X)\cong i_*\det\mathcal{N}_{Y/X}$. □

11.2. **Конструкция Серра.** Конструкция Серра при выполнении некоторых условий позволяет по локально полному пересечению $Y\subset X$ коразмерности 2 и по продолжению детерминанта нормального расслоения с $Y$ на $X$ строить расслоение ранга 2 на многообразии $X$ с регулярным сечением. Начнем с важной леммы.

**Лемма 11.7.** *Пусть $L$ линейное расслоение на многообразии $X$, а $Y\subset X$ — локально полное пересечение коразмерности 2. Если $\mathrm{H}^1(X,L^*)=\mathrm{H}^2(X,L^*)=0$, то $\mathrm{Ext}^1(J_Y,L^*)=\mathrm{Hom}(L_{|Y},\det\mathcal{N}_{Y/X})$, причем расширение*

$$0\to L^*\to F\to J_Y\to 0$$

*соответствующее морфизму $f: L_{|Y}\to\det\mathcal{N}_{Y/X}$ дает локально свободный пучок $F$ тогда и только тогда, когда $f$ — сюрьекция.*

**Доказательство:** Воспользуемся точной последовательностью из Упр. 5.3:

$$0\to\mathrm{H}^1(X,\mathcal{H}om(J_Y,L^*))\to\mathrm{Ext}^1(J_Y,L^*)\to$$
$$\to\mathrm{H}^0(X,\mathcal{E}xt^1(J_Y,L^*))\to\mathrm{H}^2(X,\mathcal{H}om(J_Y,L^*)).$$

Применяя функтор $\mathcal{H}om(\,-\,, L^*)$ к точной последовательности $0 \to J_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$ и пользуясь тем, что

$$\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_Y, L^*) \cong \mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \otimes L^* \cong \begin{cases} L^* \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}, & \text{при } p = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

получаем

$$\mathcal{H}om(J_Y, L^*) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, L^*) \cong L^*,$$
$$\mathcal{E}xt^1(J_Y, L^*) \cong \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y, L^*) \cong L^* \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}.$$

Подставляя, получаем последовательность

$$0 \to \mathrm{H}^1(X, L^*) \to \mathrm{Ext}^1(J_Y, L^*) \to \mathrm{H}^0(X, L^* \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}) \to H^2(X, L^*),$$

следовательно

$$\mathrm{Ext}^1(J_Y, L^*) = \mathrm{H}^0(X, L^* \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}) = \\ = \mathrm{H}^0(Y, L^*_{|Y} \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}) = \mathrm{Hom}(L_{|Y}, \det \mathcal{N}_{Y/X}),$$

тем самым первая часть леммы доказана.

Рассмотрим теперь расширение $0 \to L^* \to F \to J_Y \to 0$, соответствующее морфизму $f : L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$. Как известно, пучок $F$ локально свободен тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}xt^{>0}(F, \mathcal{O}_X) = 0$. Применяя функтор $\mathcal{H}om(\,-\,, \mathcal{O}_X)$ получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \to L \to \det \mathcal{N}_{Y/X} \to \mathcal{E}xt^1(F, \mathcal{O}_X) \to \dots$$

из которой видно, что $F$ локально свободен тогда и только тогда, когда морфизм $L \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ сюрьективен. Однако этот морфизм очевидно раскладывается в композицию $L \to L_{|Y} \xrightarrow{f} \det \mathcal{N}_{Y/X}$ в которой первый морфизм сюрьективен. Окончательно получаем, что $F$ локально свободен тогда и только тогда, когда морфизм $f : L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ сюрьективен, что и требовалось доказать. □

**Упражнение 11.8.** Покажите, что для любого расширения

$$0 \to L^* \to F \to J_Y \to 0$$

имеем $\det F \cong L^*$.

**Теорема 11.9.** *Пусть $L$ — линейное расслоение на многообразии $X$, такое что $\mathrm{H}^1(X, L^*) = \mathrm{H}^2(X, L^*) = 0$. Для всякого локально полного пересечения $Y \subset X$ коразмерности 2, такого что $\det \mathcal{N}_{Y/X} \cong L_{|Y}$, существует пара $(E, s)$, где $E$ — расслоение ранга 2 на $X$, такое что $\det E \cong L$, а $s$ — регулярное сечение $E$, так что $Y = \{s = 0\}$. Множество таких пар $(E, s)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством изоморфизмов $L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$.*

**Доказательство:** Допустим $(E, s)$ — искомая пара. Так как $r(E) = 2$ и $\det E \cong L$, то резольвента Кошуля пучка $\mathcal{O}_Y$ имеет вид

$$0 \to L^* \xrightarrow{s} E^* \xrightarrow{s} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

Это означает, что расслоение $E^*$ является расширением пучка идеалов $J_Y$ с помощью $L^*$. Из леммы 11.7 следует, что всякому сюрьективному гомоморфизму $f : L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ можно сопоставить единственное расширение

$$0 \to L^* \to F \to J_Y \to 0$$

с локально свободным пучком $F$. Всякому такому расширению можно сопоставить расслоение $E = F^*$ и сечение $s \in \Gamma(X, E)$, двойственное к гомоморфизму $F \to J_Y \to \mathcal{O}_X$. Из Упр. 11.8 следует, что $\det E = L$. Кроме того, по построению сечение $s$ обращается в нуль в точности на подмногообразии $Y$. Тем самым, пара $(E, s)$ удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Таким образом, множество пар $(E, s)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством сюрьекций $L_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$. Остается заметить, что всякий сюрьективный гомоморфизм между линейными расслоениями является изоморфизмом. □

*Замечание.* Домножая комплекс Кошуля пучка $\mathcal{O}_Y$ на $L$ и пользуясь тем, что $E^* \otimes L \cong E^* \otimes \det E \cong E$, получаем точную тройку

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to J_Y \otimes L \to 0.$$

11.3. **Расслоения ранга 2 на проективных пространствах.** В случае $X = \mathbb{P}^n$ теорема Ботта позволяет упростить условия теоремы 11.9.

**Теорема 11.10.** *Пусть $Y \subset \mathbb{P}^n$ — локально полное пересечение коразмерности 2, такое что $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(k)_{|Y}$. Пусть кроме того, либо $n \geq 3$, либо $n = 2$ и $k \leq 2$. Тогда существует пара $(E, s)$, где $E$ — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^n$, такое что $\det E \cong \mathcal{O}(k)$, а $s$ — регулярное сечение $E$, так что $Y = \{s = 0\}$. Множество таких пар $(E, s)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством изоморфизмов $\mathcal{O}(k)_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$.*

**Доказательство:** Достаточно заметить, что как при $n \geq 3$, так и при $n = 2$, $k \leq 2$ по теореме Ботта имеем $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-k)) = \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-k)) = 0$. □

**Пример 11.11.** **(1)** Пусть $X = \mathbb{P}^2$, $Y = \{x_1, \dots, x_m\}$. Всякое расслоение на $Y$ тривиально, поэтому можно взять в качестве расслоения $L$ любое расслоение $\mathcal{O}(k)$ с $k \leq 2$. Применяя теорему 11.10 получаем расслоение $E$ на $\mathbb{P}^2$ и точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(k) \to 0.$$

При $k = 0$ — это расслоение, построенное в разделе 4.5.

**(2)** Пусть $X = \mathbb{P}^3$, $Y = Y_1 \bigsqcup \dots \bigsqcup Y_m$, где $Y_1, \dots, Y_m$ — попарно не пересекающиеся прямые. Так как

$$(\mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3})_{|Y_i} = \mathcal{N}_{Y_i/\mathbb{P}^3} = (\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1))_{|Y_i},$$

то $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}(2)_{|Y}$. Применяя теорему 11.10 получаем расслоение $E$ на $\mathbb{P}^3$ и точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(2) \to 0.$$

**(3)** Пусть $X = \mathbb{P}^3$, $Y = Y_1 \bigsqcup \dots \bigsqcup Y_m \subset \mathbb{P}^3$, где $Y_i = \{s_i = s'_i = 0\}$, $s_i \in \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(a_i))$, $s'_i \in \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(a'_i))$, и кривые $Y_i$ попарно не пересекаются. Так как

$$(\mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3})_{|Y_i} = \mathcal{N}_{Y_i/\mathbb{P}^3} = (\mathcal{O}(a_i) \oplus \mathcal{O}(a'_i))_{|Y_i},$$

то $(\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3})_{|Y_i} = \mathcal{O}(a_i + a'_i)_{|Y}$. Допустим, что для любого $i$ имеем $a_i + a'_i = k$, где $k$ — фиксировано. Тогда $\det \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}(k)_{|Y}$. Применяя теорему 11.10 получаем расслоение $E$ на $\mathbb{P}^3$ и точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(k) \to 0.$$

**Упражнение 11.12.** Для каждого из расслоений предыдущего примера вычислите классы Чженя и тип расщепления.

11.4. **Полные пересечения и расщепимые расслоения.**

**Лемма 11.13.** *Если $Y$ — полное пересечение коразмерности 2 в $\mathbb{P}^n$ и $n \geq 3$, то* $\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}$.

**Доказательство:** Допустим $Y = \{s_1 = s_2 = 0\}$, где $s_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(a_i))$. Тогда пучок $\mathcal{O}_Y$ имеет резольвенту Кошуля

$$0 \to \mathcal{O}(-a_1 - a_2) \to \mathcal{O}(-a_1) \oplus \mathcal{O}(-a_2) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

Так как $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-a)) = 0$ при $p \leq 2$, $n \geq 3$ и $a > 0$, то отсюда легко следует, что $\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. □

**Теорема 11.14.** *Пусть $E$ — расслоение на $\mathbb{P}^n$, где $n \geq 3$, построенное по локально полному пересечению $Y$ коразмерности 2. Тогда $E$ расщепимо тогда и только тогда, когда $Y$ является глобально полным пересечением.*

**Доказательство:** Допустим $E$ — расщепимо, то есть $E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$. Тогда $s = (s_1, s_2)$ и $Y = \{s = 0\} = \{s_1 = s_2 = 0\}$, то есть $Y$ — полное пересечение.

Обратно, допустим, что $Y$ — полное пересечение, то есть $Y = \{s_1 = s_2 = 0\}$, где $s_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(a_i))$. Тогда пара $(\mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2), (s_1, s_2))$ является одной из пар, соответствующих подмногообразию $Y$ в смысле теоремы 11.10. Поэтому, если мы докажем, что изоморфизм $\mathcal{O}(a_1 + a_2)_{|Y} \to \det \mathcal{N}_{Y/X}$ единственен (с точностью до умножения на константу), то отсюда по теореме 11.10 будет следовать, что $E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$.

Но заметим, что множество таких изоморфизмов совпадает с множеством автоморфизмов расслоения $\det \mathcal{N}_{Y/X}$, но

$$\mathrm{Hom}(\det \mathcal{N}_{Y/X}, \det \mathcal{N}_{Y/X}) = \mathrm{H}^0(Y, \det \mathcal{N}^*_{Y/X} \otimes \det \mathcal{N}_{Y/X}) = \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}$$

(по лемме 11.13). Значит все автоморфизмы оличаются лишь умножением на константу, и все доказано. □