2. Теорема Гротендика.

Сегодня мы докажем несколько важных теорем.

2.1. **Теорема Ботта.** Начнем с вычиления когомологий линейных расслоений на проективных пространствах, но сначала докажем общую теорему об обращении в нуль когомологий.

Теорема 2.1. *Пусть X — n-мерное проективное многообразие. Тогда для любого расслоения E на X имеем $\mathrm{H}^{>n}(X,E)=0$.*

Доказательство: Допустим $X\subset\mathbb{P}^N$. Если $\dim X=n$, то найдется подпространство $\mathbb{P}^{N-n-1}\subset\mathbb{P}^N$, такое что $X\cap\mathbb{P}^{N-n-1}=\emptyset$. Выберем однородные координаты $z_0,\dots,z_N$ на $\mathbb{P}^N$ так, чтобы $\mathbb{P}^{N-n-1}$ задавалось уравнениями $z_0=\dots=z_n=0$. Пусть $U_0,\dots,U_N$ — стандартное покрытие $\mathbb{P}^N$ относительно этих координат. Тогда $\bigcup_{i=0}^n U_i=\mathbb{P}^N-\mathbb{P}^{N-n-1}$, следовательно $X=\bigcup_{i=0}^n(X\cap U_i)$. Всякое $U_i^X=X\cap U_i$ — аффинно, значит $U_\bullet^X=\{U_0^X,\dots,U_n^X\}$ — аффинное покрытие X. По теореме 1.18 имеем $\mathrm{H}^p(X,E)=\check{\mathrm{H}}^p(U_\bullet^X,E)$, однако покрытие $U_\bullet^X$ состоит из $(n+1)$-го множества, поэтому $\mathcal{C}_E^{>n}(U_\bullet^X)=0$, следовательно $\check{\mathrm{H}}^{>n}(U_\bullet^X,E)=0$. □

Займемся теперь вычислением когомологий проективного пространства.

Теорема 2.2 (Теорема Ботта). *Пусть $\dim V=n+1$. Тогда*

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}(V),\mathcal{O}(k))=\begin{cases}\mathbf{S}^kV^*, & p=0,\ k\ge 0\\ \mathbf{S}^{-k-n-1}V, & p=n,\ k\le -n-1\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

где $\mathbf{S}^k$ обозначает k-ую симметрическую степень векторного пространства.

Доказательство: Воспользуемся теоремой 1.18, то есть будем вычислять когомологии по Чеху, используя стандартное покрытие $\mathbb{P}(V)=\bigcup_{i=0}^n U_i$. Для удобства добавим к комплексу Чеха $\mathcal{C}^\bullet_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)$ член $\mathcal{C}^{-1}_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)=\Gamma(\mathbb{P}(V),\mathcal{O}(k))$. Пусть $I=\{i_0<\dots<i_p\}$. Обозначим $U_I:=U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}$. Легко видеть, что

$$\Gamma(U_I,\mathcal{O}(k))=\bigoplus\mathbb{C}z^\alpha,$$

где $z^\alpha:=z_0^{\alpha_0}\cdots z_n^{\alpha_n}$, а суммирование ведется по всем $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$, таким что $\forall i\notin I\ \alpha_i\ge 0$ и $\sum_{i=0}^n\alpha_i=k$. Тем самым расширенный комплекс Чеха $\tilde{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)$ оказывается градуированным группой $\mathbb{Z}^{n+1}$. Рассмотрим его градуировочную компоненту $\tilde{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)^\alpha$. Ясно, что

$$\tilde{\mathcal{C}}^p_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)^\alpha=\bigoplus_{I(\alpha)\subset I,\ |I|=p+1}\mathbb{C}z^\alpha,$$

где $I(\alpha)=\{0\le i\le n\mid \alpha_i<0\}$. Отсюда видно, что

$$\tilde{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{O}(k)}(U_\bullet)^\alpha=\bigotimes_{i\notin I(\alpha)}(\mathbb{C}\xrightarrow{1}\mathbb{C}),$$

следовательно он ацикличен для всех α, если $I(\alpha)\ne\{0,\dots,n\}$. В последнем же случае, он имеет одномерную когомологию равную $\mathbb{C}z^\alpha$ в n-ом члене. Таким образом, получаем

$$\check{\mathrm{H}}^p(U_\bullet, \mathcal{O}(k)) = \begin{cases} \oplus_{\alpha\ge 0,\ |\alpha|=k}\mathbb{C}z^\alpha, & \text{при } p=0\\ \oplus_{\alpha< 0,\ |\alpha|=k}\mathbb{C}z^\alpha, & \text{при } p=n\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

где $\alpha \ge 0$ означает, что $\forall i\ \alpha_i \ge 0$, $\alpha < 0$ означает, что $\forall i\ \alpha_i < 0$, а $|\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i$. Осталось заметить, что полученные пространства легко отождествить с симметрическими степенями V и V^*. □

2.2. **Теоремы Картана.** Для всякого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ обозначим $E(k) = E\otimes\mathcal{O}(k)$. Расслоение $E(k)$ называется подкруткой расслоения E на k.

Определение. Будем говорить, что расслоение E на многообразии X порождается глобальными сечениями, если отображение вычисления $\Gamma(X,E)\otimes\mathcal{O}\to E$ сюрьективно. Иначе говря, если для любой точки $x\in X$ значения глобальных сечений расслоения E в точке x порождают слой расслоения E в точке x.

Теорема 2.3 (Теорема Картана A). *Для любого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ существует $k_0\in\mathbb{Z}$, такое что для любого $k\ge k_0$ расслоение $E(k)$ порождается глобальными сечениями.*

Доказательство: Приведем доказательство теоремы в предположении, что расслоение E тривиализовано в стандартном покрытии пространства $\mathbb{P}^n$. Допустим расслоение E задается в стандартном покрытии коциклом g_{ij}. Тогда согласно Упр. 1.9 (3) расслоение $E(k)$ задается коциклом $g_{ij}(z_j/z_i)^k$. Ясно, что достаточно проверить, что при больших k расслоение $E(k)$ порождается глобальными сечениями во всех точках открытого подмножества U_0.

Рассмотрим элементы коцикла $g_{i0} : U_i\cap U_0 \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Можно рассматривать g_{i0} как матрицу размера $r\times r$, коэффициенты которой являются алгебраическими функциями на $U_i\cap U_0$. Однако всякая алгебраическая функция на $U_i\cap U_0$ имеет вид $f(z)/(z_0z_i)^N$, где $f(z)$ — однородный многочлен степени $2N$. Значит можно записать $g_{i0}(z) = f_{i0}(z)/(z_0z_i)^N$, где $f_{i0}(z)$ — матрица размера $r\times r$, коэффициенты которой являются однородными многочленами степени $2N$. Тогда при $k\ge N$

$$g_{i0}(z)(z_0/z_i)^k = f_{i0}(z)z_0^{k-N}/z_i^{k+N}$$

следовательно для любого вектора $e\in\mathbb{C}^r$ имеем

$$(g_{i0}(z)(z_0/z_i)^k)e = (f_{i0}(z)z_0^{k-N}/z_i^{k+N})e.$$

Правая часть является регулярной функцией на U_i со значениями в $\mathbb{C}^r$. Это значит, что набор

$$s_0 = e,\qquad s_i = (f_{i0}(z)z_0^{k-N}/z_i^{k+N})e\quad (i=1,\dots,n)$$

задает глобальное сечение расслоения $E(k)$ на $\mathbb{P}^n$ (см. Упр. 1.11 (2)). Вектор e мы можем выбирать произвольно, поэтому построенный набор глобальных сечений очевидно порождает расслоение $E(k)$ над U_0. □

При доказательстве следующих теорем нам понадобится лемма.

Лемма 2.4. **(1)** *Если $\phi : E_1\to E_2$ — вложение расслоений, то существует расслоение E_3 и гомоморфизм $\psi : E_2\to E_3$, такой что последовательность $0\to E_1\to E_2\to E_3\to 0$ точна.*

(2) *Аналогично, если $\psi : E_2 \to E_3$ — сюрьекция расслоений, то существует расслоение E_1 и гомоморфизм $\phi : E_1 \to E_2$, такой что последовательность $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ точна.*

Доказательство: Пусть $r_1 = r(E_1)$, $r_2 = r(E_2)$ и $r_3 = r_2 - r_1$. Допустим расслоения E_1 и E_2 тривиализованы в некотором покрытии многообразия X. Покажем, что измельчая покрытие и меняя тривиализацию можно добиться того, чтобы на каждом элементе покрытия U_i морфизм ϕ задавался бы матрицей

$$\phi_i(z) = \begin{pmatrix} A_i(z) \\ B_i(z) \end{pmatrix},$$

где $A_i(z)$ — матрица размера $r_1 \times r_1$, причем $\det A_i(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке множества U_i, а $B_i(z)$ — матрица размера $r_3 \times r_1$. Действительно, поскольку ϕ — вложение расслоений, то ϕ локально задается матрицей имеющей во всех точках ранг r_1. Значит, в любой точке один из миноров размера $r_1 \times r_1$ этой матрицы отличен от нуля. Измельчая покрытие и меняя тривиализацию, можно добиться того, что это будет минор, образованный первыми r_1 строками матрицы. Но это как раз то, что нам и требуется.

Допустим, что мы выбрали такое покрытие и такие тривиализации. Пусть g_{ij} — коцикл, задающий расслоение E_2. Запишем его в блочном виде

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij}^{11} & , & g_{ij}^{12} \\ g_{ij}^{21} & , & g_{ij}^{22} \end{pmatrix},$$

где g_{ij}^{11} — матрица размера $r_1 \times r_1$, а g_{ij}^{22} — матрица размера $r_3 \times r_3$. Пусть

$$h_{ij} = -B_i A_i^{-1} g_{ij}^{12} + g_{ij}^{22}, \qquad \psi_i = \left(-B_i A_i^{-1}\ ,\ E\right),$$

где E — единичная матрица размера $r_3 \times r_3$. Легко проверить, что тогда

$$h_{ij} h_{jk} = h_{ik}, \quad \psi_i = h_{ij} \psi_j g_{ij}^{-1}$$

и что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{r_1} \xrightarrow{\phi_i(z)} \mathbb{C}^{r_2} \xrightarrow{\psi_i(z)} \mathbb{C}^{r_3} \longrightarrow 0$$

точна в любой точке $z \in U_i$. Первое из равенств означает, что h_{ij} — коцикл. Пусть E_3 — соответствующее расслоение ранга r_3. Второе равенство означает, что ψ_i задают гомоморфизм $\psi : E_2 \to E_3$ (см. Упр. 1.11 (2)). Наконец точность последовательности означает точность последвательности расслоений. Тем самым доказан пункт (1). Пункт (2) доказывется аналогично. □

Упражнение 2.5. Пусть $f : E \to F$ — гомоморфизм расслоений. Докажите, что если ранг морфизма $f_x : E_x \to F_x$ постоянен, то существуют точная последовательность

$$0 \to K \to E \xrightarrow{f} F \to C \to 0,$$

где K и C — расслоения рангов $r(E) - r(f)$ и $r(F) - r(f)$ соответственно.

Следующая теорема вместе с теоремой A полностью описывает когомологии больших положительных подкруток произвольного расслоения.

Теорема 2.6 (Теорема Картана B). *Для любого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, такое что для любых $k \geq k_0$ и $p > 0$ имеем $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$.*

Доказательство: Докажем теорему убывающей индукцией по p. При $p > n$ все следует из теоремы 2.1 — это доставляет базу индукции. Допустим, что мы уже доказали, что для любого расслоения E найдется $k_p(E) \in \mathbb{Z}$, такое что $\mathrm{H}^{>p}(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$ при $k \geq k_p(E)$.

Пусть $p \geq 1$. Рассмотрим произвольное расслоение E. По теореме A найдется $k' \in \mathbb{Z}$, такое что $E(k')$ порождается глобальными сечениями. Это означает, что существует сюрьекция $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, E(k')) \otimes \mathcal{O} \to E(k')$. По лемме 2.4 эту сюрьекцию можно достроить до точной тройки расслоений

$$0 \to E' \to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, E(k')) \otimes \mathcal{O} \to E(k') \to 0. \qquad (*)$$

Положим $k_{p-1}(E) = k_p(E') + k'$. Тогда при $k \geq k_{p-1}(E)$ длинная точная последовательность когомологий, соответствующая этой последовательности расслоений, подкрученной на $k - k'$ имеет вид

$$\to \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, E(k')) \otimes \mathcal{O}(k-k')) \to \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, E(k)) \to \mathrm{H}^{i+1}(\mathbb{P}^n, E'(k-k')) \to$$

Из теоремы Ботта и из предположения индукции для расслоения E' теперь следует, что $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$ при $i \geq p$ и $k \geq k_{p-1}(E)$, что и требовалось доказать. □

Аналогично, можно описать поведение расслоения при больших отрицательных подкрутках.

Теорема 2.7 (Теорема Картана B$'$). *Для любого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, такое что для любых $k \geq k_0$ и $p < n$ имеем $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(-k)) = 0$.*

Набросок доказательства: Доказательство теоремы B$'$ “двойственно” доказательству теоремы B. Во-первых, убывающая индукция заменятся возрастающей. Во-вторых, “дуализируется” основной шаг в доказательстве — точная последовательность $(*)$ заменяется на точную последовательность

$$0 \to E(-k') \to (\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, E^*(k')))^* \otimes \mathcal{O} \to E' \to 0.$$

□

Замечание. На самом деле, теорема B$'$ является следствием теоремы B и двойственности Серра, о которой мы поговорим позже.

2.3. **Теорема Гротендика.** В этом разделе мы дадим полное описание векторных расслоений на проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

Теорема 2.8 (Теорема Гротендика). *Пусть E — расслоение ранга r на $\mathbb{P}^1$. Тогда существует единственная неубывающая последовательность целых чисел $a_1 \geq \cdots \geq a_r$, так что*

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r).$$

Доказательство существования: Воспользуемся индукцией по r. При $r = 1$ нечего доказывать ввиду теоремы 1.8. Допустим $r > 1$. Из теорем Картана A и B$'$ следует, что существует $a \in \mathbb{Z}$, такое что

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(a)) \neq 0, \qquad \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(a-1)) = 0.$$

Пусть s — нетривиальное глобальное сечение расслоения $E(a)$. Тогда s задает морфизм расслоений $\mathcal{O} \to E(a)$. Докажем, что s является вложением расслоений. Допустим противное. Это означает, что сечение s обращается в нуль в некоторой точке прямой $\mathbb{P}^1$. Выберем однородные координаты $(z_0 : z_1)$ на $\mathbb{P}^1$, в которых эта точка равна $(0 : 1)$. Легко показать, что тогда s/z_0

является корректно определенным глобальным сечением расслоения $E(a-1)$, что противоречит выбору a.

Так как s — вложение расслоений то по лемме 2.4 существует точная последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E(a) \to E' \to 0.$$

Здесь E' — расслоение ранга $r-1$. Значит по предположению индукции имеем $E' \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1})$, то есть получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E(a) \to \mathcal{O}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1}) \to 0. \tag{2.9}$$

Подкручивая ее на -1 и пользуясь теоремой Ботта получаем изоморфизм

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^1, E(a-1)) = \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b_1 - 1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1} - 1)),$$

значит из выбора a и из теоремы Ботта следует, что $b_1, \ldots, b_{r-1} \le 0$.

Докажем теперь, что последовательность (2.9) расщепляется. Для этого достаточно построить морфизм $f : E(a) \to \mathcal{O}$ такой что $f \cdot s = 1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. Применяя к точной последовательности (2.9) функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O})$ получаем точную последовательность

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(E(a), \mathcal{O}) \xrightarrow{s} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1}), \mathcal{O}) \to \ldots$$

Поскольку $b_1, \ldots, b_{r-1} \le 0$ то из Упр. 1.16 и из теоремы Ботта следует

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1}), \mathcal{O}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(-b_{r-1})) = 0$$

Значит существует $f \in \mathrm{Hom}(E(a), \mathcal{O})$, такой что $s(f) = 1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. Однако, $s(f) = f \cdot s$, следовательно последовательность (2.9) расщепляется, значит

$$E(a) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1})$$

и все доказано. □

Доказательство единственности: Допустим

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r) \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_r),$$

причем $a_1 \ge \cdots \ge a_r$, $b_1 \ge \cdots \ge b_r$. Пусть $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$. Пусть s такое число, что $a_1 = b_1, \ldots, a_s = b_s$, но $a_{s+1} \ne b_{s+1}$. Пусть для определенности $a_{s+1} > b_{s+1}$. Тогда с одной стороны

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^1, E(-a_{s+1})) &= H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(a_1 - a_{s+1}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r - a_{s+1})) = \\ &= \mathbf{S}^{a_1 - a_{s+1}} V^* \oplus \cdots \oplus \mathbf{S}^{a_s - a_{s+1}} V^* \oplus \mathbb{C}, \end{aligned}$$

а с другой стороны

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^1, E(-a_{s+1})) &= H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b_1 - a_{s+1}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_r - a_{s+1})) = \\ &= \mathbf{S}^{b_1 - a_{s+1}} V^* \oplus \cdots \oplus \mathbf{S}^{b_s - a_{s+1}} V^* = \mathbf{S}^{a_1 - a_{s+1}} V^* \oplus \cdots \oplus \mathbf{S}^{a_s - a_{s+1}} V^*, \end{aligned}$$

то есть мы пришли к противоречию. □

Определение. Векторное расслоение называется разложимым или расщепимым, если оно изоморфно прямой сумме расслоений меньшего ранга.

Теорему Гротендика можно переформулировать следующим образом: *всякое расслоение на $\mathbb{P}^1$ разложимо.* В дальнейшем мы увидим, что это уже не верно для других проективных пространств.