3. Когерентные пучки.

Как уже отмечалось, категория векторных расслоений не является абелевой. Это существенно снижает возможности применения методов гомологической алгебры (точных последовательностей когомологий и других производных функторов), что является ее большим недостатком. Чтобы устранить этот недостаток полезно вложить категорию расслоений в "хорошую" абелеву категорию. Кроме того, само определение производных функторов требует существования вложения в "хорошую" абелеву категорию. Такой категорией является категория когерентных пучков, которую мы сейчас и построим.

Чтобы получить определение когерентного пучка надо аксиоматизировать те свойства векторных расслоений, который мы хотим сохранить, а именно их когомологические свойства. Напомним, что согласно теореме 1.18 единственное, что нужно знать про расслоение E для вычисления его когомологий — это пространства $\Gamma(U, E)$ сечений этого расслоения над открытыми множествами $U \subset X$ и отображения ограничения $\Gamma(U, E) \to \Gamma(U', E)$ для всякого вложения $U' \subset U$. Следующее определение аксиоматизирует свойства этих пространств.

Определение. Локально свободным пучком $\mathcal{O}$-модулей на многообразии X называется набор векторных пространств $\mathcal{E}(U)$ для всякого открытого подмножества $U \subset X$ и отображений ограничения $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U')$ для всякого вложения $U' \subset U$, такой что

(0) Пространство $\mathcal{E}(U)$ является модулем над алгеброй $\Gamma(U, \mathcal{O})$ алгебраических функций на множестве U, отображение $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U')$ является гомоморфизмом $\Gamma(U, \mathcal{O})$-модулей ($\mathcal{E}(U')$ снабжается структурой $\Gamma(U, \mathcal{O})$-модуля с помощью отображения ограничения $\Gamma(U, \mathcal{O}) \to \Gamma(U', \mathcal{O})$), а композиция морфизмов ограничения $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U') \to \mathcal{E}(U'')$ совпадает с морфизмом ограничения $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U'')$.

(1) (Пучковость) Для любого покрытия $U = \bigcup_i U_i$ точна последовательность

$$0 \to \mathcal{E}(U) \to \oplus_i \mathcal{E}(U_i) \xrightarrow{d} \oplus_{i<j} \mathcal{E}(U_i \cap U_j) \tag{3.1}$$

(из предыдущего свойства следует, что последовательность (3.1) всегда является комплексом).

(1) (Локальная свободность) Любая точка $x \in X$ обладает такой окрестностью $x \in U$, что

$$\mathcal{E}(U) \cong \Gamma(U, \mathcal{O})^{\oplus r}.$$

(2) (Квазикогерентность) Любая точка $x \in X$ обладает окрестностью $x \in U$, такой что для любого $U' \subset U$ имеем

$$\mathcal{E}(U') \cong \mathcal{E}(U) \otimes_{\Gamma(U,\mathcal{O})} \Gamma(U'\mathcal{O}),$$

и отображение ограничения совпадает с каноническим морфизмом

$$\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U) \otimes_{\Gamma(U,\mathcal{O})} \Gamma(U'\mathcal{O}), \qquad s \mapsto s \otimes 1.$$

Число r называется рангом локально свободного пучка $\mathcal{E}$ и обозначается $r(\mathcal{E})$.

Упражнение 3.2. **(1)** Докажите, что пространства $\mathcal{E}(U) = \Gamma(U, E)$ сечений расслоения E образуют локально свободный пучок ранга $r(\mathcal{E}) = r(E)$. **(2)** Докажите, что по всякому локально свободному пучку $\mathcal{E}$ ранга r можно построить расслоение E ранга r, такое что $\mathcal{E}(U) = \Gamma(U, E)$.

Тем самым понятие локально свободного пучка полностью эквивалентно понятию векторного расслоения.

Теперь легко получить расширение категории векторных расслоений. Это можно сделать несколькими способами. Например, отбрасывая условие локальной свободности, мы получаем определение квазикогерентного пучка $\mathcal{O}$-модулей на X. Заменяя условие локальной свободности на условие локальной конечной порожденности

(2′) Любая точка $x \in X$ обладает окрестностью $x \in U$, такой что $\mathcal{E}(U)$ — конечно порожденный $\Gamma(U, \mathcal{O})$-модуль.

получаем определение когерентного пучка $\mathcal{O}$-модулей на X. Далее, отбрасывая условия (2) и (3) получаем определение пучка $\mathcal{O}$-модулей, а отбрасывая еще и условие (0) получаем определение пучка векторных пространств. Наконец, отбрасывая в определении (квази)когерентного пучка условие пучковости, получаем определение (квази)когерентного предпучка на X.

Замечание. Понятие предпучка можно переформулировать следующим образом. Пусть $\mathrm{Open}(X)$ — категория, объекты которой это открытые подмножества, а морфизмы — вложения открытых подмножеств. Тогда предпучок векторных пространств это просто контравариантный функтор из категории $\mathrm{Open}(X)$ в категорию векторных пространств. Аналогично можно определить предпучок групп, абелевых групп, колец, предпучок модулей над предпучком колец, и т.д. Добавляя свойство (1) можно получить определение пучка в любой из вышеперечисленных категорий.

Пример 3.3. **(1)** Пусть $x \in X$. Структурный пучок точки $\mathcal{O}_x$ определяется равенствами

$$\mathcal{O}_x(U) = \begin{cases} \mathbb{C}, & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

(2) Пусть $Z \subset X$ — подмногообразие. Структурный пучок подмногообразия $\mathcal{O}_Z$ определяется равенствами

$$\mathcal{O}_Z(U) = \begin{cases} \Gamma(U \cap Z, \mathcal{O}), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

(3) Пучок идеалов подмногообразия J_Z определяется равенствами

$$J_Z(U) = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}) \mid f_{|Z \cap U} = 0\}.$$

(4) Постоянный предпучок $\mathbb{Z}'_X$ определяется равенством $\mathbb{Z}'_X(U) = \mathbb{Z}$.

(5) Постоянный пучок $\mathbb{Z}_X$ определяется равенством $\mathbb{Z}_X(U) = \mathbb{Z}^{\pi_0(U)}$, где $\pi_0(U)$ — множество компонент связности множества U.

Упражнение 3.4. **(1)** Покажите, что $\mathcal{O}_x$, $\mathcal{O}_Z$ и J_Z — когерентные пучки. **(2)** Проверьте, что $\mathbb{Z}_X$ является пучком абелевых групп, а $\mathbb{Z}'_X$ не является пучком.

Определение. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ — пучки $\mathcal{O}$-модулей на X. Гомоморфизм $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ — это набор гомоморфизмов $\Gamma(U, \mathcal{O})$-модулей $f_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U)$, коммутирующих с гомоморфизмами ограничения.

Упражнение 3.5. Проверьте, что если $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — пучки сечений расслоений E и F, то $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(E, F)$.

Обозначим через $\mathrm{Sh}(X)$ категорию пучков на X, через $\mathrm{QCoh}(X)$ — категорию квазикогерентных пучков на X, через $\mathrm{Coh}(X)$ категорию когерентных пучков на X, а через $\mathrm{Coh}^{\mathrm{lf}}(X)$ — категорию локально свободных когерентных пучков на X. Тогда у нас получается последовательность вложений подкатегорий

$$\mathrm{Coh}^{\mathrm{lf}}(X) \subset \mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{QCoh}(X) \subset \mathrm{Sh}(X),$$

причем первые два вложения — полные. Согласно Упр. 3.5 категория векторных расслоений на X эквивалнетна категории $\mathrm{Coh}^{\mathrm{lf}}(X)$, то есть является полной подкатегорией в $\mathrm{Coh}(X)$. В дальнейшем мы не будем делать различия между векторными расслоениями и локально свободными когерентными пучками. В частности, пучок сечений расслоения E будет обозначаться той же буквой E.

Следующая теорема показывает, что из всякого предпучка можно канонически образом изготовить пучок. Эта процедура очень важна для построения коядер в категории пучков.

Теорема 3.6. *Для любого предпучка $\mathcal{E}$ существует пучок $\widetilde{\mathcal{E}}$ и гомоморфизм предпучков $\phi : \mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$, такой что любой гомоморфизм $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — пучок, пропускается через ϕ. Более того, сопоставление $\mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$ является функтором из категории предпучков в категорию пучков, а ϕ — морфизмом функторов.*

Доказательство: Грубо говоря, предпучок не является пучком, если в нем не хватает сечений. Соответственно, процедура пучковизации состоит в добавлении недостающих сечений: мы берем покрытие $U = \bigcup U_i$ и если комплекс (3.1) не является точной последовательностью, то мы заменяем $\mathcal{E}(U)$ на $\mathrm{Ker}\, d$. Эту операцию надо проделать много раз с разными покрытиями, пока наш предпучок не станет пучком.

Более точно, надо сделать так. Определим слой пучка $\mathcal{E}$ в точке x как $\mathcal{E}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{E}(U)$. Далее, положим

$$\widetilde{\mathcal{E}}(U) = \left\{ s : U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathcal{E}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in U\ \exists x \in U' \subset U \text{ и } s' \in \mathcal{E}(U'), \text{ так что} \\ \forall y \in U' \text{ имеем } s(y) = s'(y) \in \mathcal{E}_y \end{array} \right\}$$

Легко проверить, что $\widetilde{\mathcal{E}}$ искомый пучок. □

Замечание. Важно не путать слой E_x расслоения в точке x и слой $\mathcal{E}_x$ его пучка сечений $\mathcal{E}$. Это разные вещи! Слой $\mathcal{E}_x$ пучка сечений — это множество ростков сечений расслоения E в точке x. На самом деле E_x и $\mathcal{E}_x$ связаны следующим образом. $\mathcal{E}_x$ — модуль над кольцом $\mathcal{O}_{X,x}$ ростков функций в точке x. Кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ — локальное, то есть имеет ровно один максимальный идеал $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$. Так вот, $E_x = \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$. Чтобы избежать путаницы, в дальнейшем векторное пространство $\mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ будем называть геометрическим слоем пучка $\mathcal{E}$.

Функтор $\mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}$ называется функтором пучковизации, а пучок $\widetilde{\mathcal{E}}$ называется пучком, ассоциированным с предпучком $\mathcal{E}$.

Упражнение 3.7. (1) Проверьте, что $\widetilde{\mathcal{E}}_x = \mathcal{E}_x$ для любой точки $x \in X$. **(2)** Докажите, что если предпучок $\mathcal{E}$ когерентен, то пучок $\widetilde{\mathcal{E}}$ тоже когрентен. (Указание: Достаточно проверить, что если U — такое аффинное открытое множество, что $\forall U' \subset U$ имеем $\mathcal{E}(U') = \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(U')$, то $\widetilde{\mathcal{E}}(U) = \mathcal{E}(U)$)

Теорема 3.8. *Категории* $\mathrm{Sh}(X)$, $\mathrm{QCoh}(X)$ *и* $\mathrm{Coh}(X)$ *— абелевы.*

Доказательство: Достаточно проверить, что категория $\mathrm{Sh}(X)$ — абелева и что подкатегории $\mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{QCoh}(X) \subset \mathrm{Sh}(X)$ замкнуты относительно взятия ядер и коядер морфизмов.

Для проверки абелевости категории $\mathrm{Sh}(X)$ надо доказать существование ядер и коядер и проверить аксиомы абелевой категории. Пусть $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ — морфизм пучков. Тогда легко показать, что $\mathcal{E}'(U) = \mathrm{Ker}(f_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U))$ является пучком. Более того, очевидно, что он является ядром морфизма f в категории пучков. С коядром ситуация немного сложнее. В этом случае $\mathcal{F}'(U) = \mathrm{Coker}(f_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U))$ уже не является пучком, а только предпучком. Однако легко видеть, что предпучок $\mathcal{F}'$ является коядром морфизма f в категории предпучков, поэтому из теоремы 3.6 следует, что ассоциированный с ним пучок $\widetilde{\mathcal{F}'}$ является коядром в категории пучков.

Ясно, что если f_U — морфизм $\mathcal{O}(U)$-модулей, то $\mathcal{E}'(U)$ и $\mathcal{F}'(U)$ являются $\mathcal{O}(U)$-модулями, причем если $\mathcal{E}(U)$ и $\mathcal{F}(U)$ конечно порождены, то $\mathcal{E}'(U)$ и $\mathcal{F}'(U)$ — тоже конечно порождены. Более того, вследствии точности функтора локализации в категории модулей предпучки $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{F}'$ — квазикогерентны. Значит подкатегории $\mathrm{Coh}(X)$ и $\mathrm{QCoh}(X)$ замкнуты относительно взятия ядер и коядер (надо еще воспользоваться Упр. 3.7).

Остается несложная проверка выполнения в $\mathrm{Sh}(X)$ аксиом абелевой категории, которую мы предоставим читателю. ☐

Упражнение 3.9. **(1)** Докажите следующий критерий точности: последовательность пучков

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{f'} \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E}'' \longrightarrow \ldots$$

точна, если для любого сечения $s \in \mathcal{E}(U)$, такого что $f_U(s) = 0$ и для любой точки $x \in U$ найдется окрестность $x \in U' \subset U$ и сечение $s' \in \mathcal{E}'(U')$, так что $s_{|U'} = f'(s')$. Иначе говоря, всякое сечение пучка $\mathcal{E}$, переходящее в 0, локально поднимается до сечения пучка $\mathcal{E}'$. **(2)** Проверьте, что последовательность пучков точна тогда и только тогда, когда она точна послойно, то есть когда $\forall x \in X$ точна последовательность

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{E}'_x \xrightarrow{f'_x} \mathcal{E}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{E}''_x \longrightarrow \ldots$$

Упражнение 3.10. Пусть $f : E \to F$ — морфизм расслоений. Докажите, что **(1)** f — сюрьекция расслоений тогда и только тогда, когда f — сюрьекция пучков; **(2)** f — вложение пучков, тогда и только тогда, когда существует точка $x \in X$, такая что f — вложение в точке x.

Таким образом, точная последовательность расслоений дает точную последовательность пучков, обратное же, вообще говоря не верно.

Пример 3.11. **(1)** Пусть Z — замкнутое подмногообразие в X. Тогда имеем точную последовательность

$$0 \to J_Z \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Z \to 0.$$

(2) Пусть $\xi \in V^*$ и H — гиперплоскость в $\mathbb{P}(V)$, заданная уравнением $\xi = 0$. Тогда имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\xi} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_H \to 0.$$

Тем самым $J_H \cong \mathcal{O}(-1)$.

(3) Пусть $L \subset \mathbb{P}(V)$ — проективное подпространство, а $W \subset V^*$ — пространство линейных функций, обращающихся в нуль на L. Пусть $\dim W = \operatorname{codim} L = d$. Тогда имеем точную последовательность

$$0 \to \Lambda^d W \otimes \mathcal{O}(-d) \to \Lambda^{d-1} W \otimes \mathcal{O}(d-1) \to \dots \to W \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_L \to 0,$$

где отображение $\Lambda^k W(-k) \to \Lambda^{k-1} W \otimes \mathcal{O}(1-k)$ индуцировано вложением

$$\Lambda^k W \subset \Lambda^{k-1} W \otimes W \subset \Lambda^{k-1} W \otimes V^* = \Lambda^{k-1} W \otimes \Gamma(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(1))$$

и морфизмом $\Gamma(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}(-k) \to \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(1-k)$.

Упражнение 3.12. Проверьте точность этих последовательностей.

Упражнение 3.13. Точные последовательности пунктов (2) и (3) имеют следующее важное обобшение. Пусть E — расслоение ранга r на многообразии X, $s \in \Gamma(X, E^*) = \operatorname{Hom}(E, \mathcal{O})$ и $Z = \{x \in X \mid s(x) = 0\}$. Докажите, что если $\operatorname{codim} Z = r$, и сечение s трансверсально пересекает нулевое сечение вдоль Z, то возникает точная последовательность

$$0 \to \Lambda^r E \to \Lambda^{r-1} E \to \dots \to E \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Z \to 0, \tag{3.14}$$

где морфизм $\Lambda^k E \to \Lambda^{k-1} E$ — это композиция

$$\Lambda^k E \subset \Lambda^{k-1} E \otimes E \xrightarrow{1 \otimes s} \Lambda^{k-1} E.$$

Точная последовательность (3.14) называется комплексом Кошуля. Ее можно интерпретировать как локально свободную резольвенту структурного пучка $\mathcal{O}_Z$. Комплекс Кошуля очень удобен для вычислений и мы им будем неоднократно пользоваться.

Замечание. Легко видеть, что точные последовательности из 3.11 (2) и 3.11 (3) являются частным случаем комплекса Кошуля при $E = \mathcal{O}(-1)$ и $E = W \otimes \mathcal{O}(-1)$ соответственно.

Замечание. Если $\operatorname{codim} Z = r$, но сечение s пересекает нулевое сечение не трансверсально, то комплекс Кошуля явлется резольвентой пучка $\mathcal{O}/J_s$, где пучок идеалов $J_s \subset \mathcal{O}$ определяется как $J_s = \operatorname{Im}(E \xrightarrow{s} \mathcal{O})$. Иначе говоря, пусть $U \subset X$ — произвольное открытое множество, на котором расслоение E тривиально, то есть $E(U) \cong \mathcal{O}(U)^{\oplus r}$. Пусть $s = (f_1, \dots, f_r)$ относительно выбранной тривализации. Тогда $J_s(U) \subset \mathcal{O}(U)$ — идеал, порожденный функциями $f_1, \dots, f_r$.