4. Неразложимое расслоения на $\mathbb{P}^2$.

Почти все операции и функторы, определенные для векторных расслоений можно перенести на когерентные пучки.

4.1. **Тензорные функторы.** Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — когерентные пучки на X. Тогда $(\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}')(U) = \mathcal{E}(U)\oplus\mathcal{E}(U')$ — когерентный пучок, называемый прямой суммой пучков $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$. Далее, $\mathcal{F}(U) = \mathcal{E}(U)\otimes_{\mathcal{O}(U)}\mathcal{E}'(U)$ и $\mathcal{F}'(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{O}(U))$ — когерентные предпучки. С их помощью легко определить тензорное произведение $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}' = \widetilde{\mathcal{F}}$ и двойственный пучок $\mathcal{E}^* = \widetilde{\mathcal{F}}'$.

Упражнение 4.1. **(1)** Проверьте, что определения тензорных функторов на пучках и на расслоениях согласованны. **(2)** Пусть Y, Z — подмногообразия в X. Вычислите $\mathcal{O}_Y\otimes\mathcal{O}_Z$ и $\mathcal{O}_Y\otimes J_Z$. **(3)** Докажите, что $(\mathcal{O}_Z)^* = 0$, $(J_Z)^* = \mathcal{O}$. Тем самым, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Z$ и $\mathcal{E} = J_Z$ — примеры пучков, таких что $\mathcal{E}^{**}\neq\mathcal{E}$.

Из Упр. 4.1 (3) видно, что когерентные пучки ведут себя по отношению к тензорным операциям не так как векторные пространства или векторные расслоения. Аналогом тут является поведение модулей над коммутативным кольцом.

Упражнение 4.2. **(1)** Покажите, что функтор $(\mathcal{E}\otimes -)$ на категории когерентных пучков точен справа, а функтор $(-)^*$ — слева. **(2)** Покажите, что функтор $(\mathcal{E}\otimes -)$ точен тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ — локально свободен.

4.2. **Когомологические функторы.** Как уже говорилось в разделе 1.5 при определенных условиях по точному слева функтору можно построить последовательность производных функторов, так что всякой короткой точной последовательности соответствует длинная точная последовательность производных функторов. Грубо говоря, производные функторы могут быть построены следующим образом. Обозначим функтор через F. Будем говорить, что объект A ацикличен для F, если для всякой точной последовательности вида $0\to A\to B\to C\to 0$ последовательность $0\to F(A)\to F(B)\to F(C)\to 0$ тоже точна. Возьмем теперь произвольный объект E. Предположим для E существует правая резольвента, составленная из ацикличных объектов, то есть точная последовательность вида

$$0\to E\to A_0\to A_1\to A_2\to\dots$$

в которой все объекты $A_0, A_1, A_2, \dots$ — ацикличны. Тогда определим $R^iF(E)$ как когомологию комплекса

$$0\to F(A_0)\to F(A_1)\to F(A_2)\to\dots$$

в i-ом члене. Из точности слева функтора F тогда следует равенство $R^0F(E) = F(E)$. Далее, пусть $0\to E^1\to E^2\to E^3\to 0$ — точная тройка. Предположим, что эту точную тройку можно достроить до точной тройки ацикличных резольвент $0\to A^1_\bullet\to A^2_\bullet\to A^3_\bullet\to 0$. Тогда всилу ацикличности объектов A^k_i применение функтора F дает точную тройку комплексов $0\to F(A^1_\bullet)\to F(A^2_\bullet)\to F(A^3_\bullet)\to 0$. Значит, по лемме о змее возникает длинная точная последовательность, составленная из когомологий этих комплексов, то есть из производных функторов $R^\bullet F(E^k)$. Конечно, это еще не все. Надо еще проверить, что определение производных функторов не зависит от выбора ацикличной резольвенты, проверить функториальность всех конструкций и т.д.

Таким образом, достаточными условиями для существования производных функторов является наличие “достаточно большого” количества ацикличных относительно этого функтора объектов. Давайте посмотрим, как все это можно применить к функторам на категории когерентных пучков.

Мы уже определили функтор глобальных сечений $\Gamma(X,\mathcal{E}) = \mathcal{E}(X)$ и функторы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, -)$ и $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{E})$.

Упражнение 4.3. **(1)** Проверьте, что функторы Γ и Hom на категории когерентных пучков точны слева и согласованы с аналогичными функторами на категории векторных расслоений. **(2)** Докажите для локально свободного пучка $\mathcal{E}$ изоморфизм функторов

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}), \qquad \mathrm{Hom}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E},\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{G}).$$

С функтором глобальных сечений $\Gamma(X, -)$ ситуация такая. В категории $\mathrm{Coh}(X)$ ацикличных объектов для построения производных функторов не достаточно. Однако в категории $\mathrm{Sh}(X)$ ацикличных объектов уже много, поэтому мы можем определить функторы когомологий $\mathrm{H}^i(X, -)$ в категории $\mathrm{Sh}(X)$, а затем ограничить их на подкатегорию $\mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{Sh}(X)$.

Для вычисления когомологий когерентных пучков можно использовать теорему 1.18. Доказательство этой теоремы для расслоений, приведенное в разделе 1.6 подходит и для когерентных пучков, так как теоремы 1.13 и 1.15 справедливы в категории $\mathrm{Coh}(X)$.

Следующее упражнение демонстрирует связь вычисления когомологий по Чеху с определением когомологий с помощью ацикличных резольвент.

Упражнение 4.4. Пусть $V \subset X$ — открытое подмножество, а E — квазикогерентный пучок на X. **(1)** Покажите, что равентсво $\underline{\mathcal{C}}_E^V(U) = E(U\cap V)$ задает квазикогерентный пучок на X, такой что $\Gamma(X,\underline{\mathcal{C}}_E^V) = \Gamma(V,E)$. **(2)** Пользуясь теоремой 1.15 проверьте, что если V — аффинное множество, то пучок E ацикличен. **(3)** Пусть $X = \bigcup_{i=0}^N U_i$ — открытое покрытие. Проверьте точность последовательности

$$0 \to E \to \underline{\mathcal{C}}_E^0 \to \underline{\mathcal{C}}_E^1 \to \underline{\mathcal{C}}_E^2 \to \dots, \qquad \text{где } \underline{\mathcal{C}}_E^p = \bigoplus_{0\le i_0<\dots<i_p\le N} \underline{\mathcal{C}}_E^{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}},$$

а морфизмы задаются формулами из раздела 1.6. **(4)** Докажите изоморфизм комплексов $\Gamma(X,\underline{\mathcal{C}}_E^\bullet) = \mathcal{C}_E^\bullet$.

Теперь перейдем к функтору Hom. Из Упр. 4.3 (2) и 4.1 (3) следует, что для локально свободного пучка $\mathcal{E}$ функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, -)$ является композицией точного функтора $\mathcal{E}^*\otimes -$ и функтора $\Gamma(X, -)$. Отсюда легко следует существование правых производных функторов $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, -)$ и изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(X,\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{F}) \qquad \text{(для локально свободного пучка } \mathcal{E}).$$

Если же $\mathcal{E}$ не является локально свободным, то для вычисления $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F})$ можно воспользоваться локально свободной резольвентой $\mathcal{E}_\bullet \to \mathcal{E}$, то есть точной последовательностью

$$\dots \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E} \to 0$$

в которой все $\mathcal{E}_i$ локально свободны. Позднее мы докажем, что всякий когерентный пучок обладает локально свободной резольвентой, поэтому вычисление функторов $\mathrm{Ext}^\bullet$ всегда можно свести к вычислению когомологий.

4.3. **Когомологии когерентных пучков.** Исследуем теперь насколько теоремы, доказанные нами для векторных расслоений на проективном пространстве справедливы для когерентных пучков.

Теорема 2.1 справедлива. Доказывается она тем же способом, что и в разделе 2.1.

Теорема Картана A тоже справедлива. Доказательство ее основано на двух фактах. Во-первых, всякий когерентный пучок на аффинном многообразии порождается глобальными сечениями, а во-вторых, всякое сечение $s \in \Gamma(U_i, E)$, где E — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$, а U_i — одно из стандартных открытых подмножеств, продолжается до сечения $\hat{s} \in \Gamma(\mathbb{P}^n, E(k))$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема Картана B следует из теоремы A и из теоремы Ботта, поэтому она справедлива для когерентных пучков.

Что же касается теоремы B$'$, то она уже не верна. Доказательство, приведенное в разделе 2.2 не проходит по причине неточности функтора $(-)^*$. Более того, легко показать, что структурный пучок точки $\mathcal{O}_x$ является контрпримером к теореме B$'$.

Упражнение 4.5. Пусть $x \in \mathbb{P}^n$. **(1)** Проверьте, что $\mathcal{O}_x \otimes \mathcal{O}(n) \cong \mathcal{O}_x$ для любого n. **(2)** Докажите, что если $x \in X$, то

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_x) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } p = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(Указание: воспользуйтесь точной последовательностью 3.11 (3) и теоремой Ботта.)

4.4. **Расширения пучков.**

Определение. Расширением пучка $\mathcal{E}$ с помощью пучка $\mathcal{E}'$ называется точная последовательность вида

$$0 \to \mathcal{E}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{E} \to 0. \tag{4.6}$$

Расширения $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, индуцирующий тождественные изоморфизмы $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}$.

Применяя к точной последовательности функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{E}')$ мы получаем длинную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}') \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \mathcal{E}') \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \to \dots$$

Сопоставим всякому расширению $\mathcal{F}$ образ $\varepsilon(\mathcal{F})$ элемента $\mathrm{id}_{\mathcal{E}'}$ в пространстве $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$.

Теорема 4.7. *Отображение $\mathcal{F} \mapsto \varepsilon(\mathcal{F})$ задает биекцию множества классов изоморфизма расширений пучка $\mathcal{E}$ с помощью пучка $\mathcal{E}'$ с пространством* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$.

Основным моментом в доказательстве является следующее свойство. Пусть $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ — морфизм когерентных пучков и $\mathcal{F}' = \mathrm{Coker}(\mathcal{E}' \xrightarrow{\alpha \oplus f} \mathcal{F} \oplus \mathcal{E}'')$. Обозначим через α' композицию $\mathcal{E}'' \xrightarrow{0 \oplus 1} \mathcal{F} \oplus \mathcal{E}'' \to \mathcal{F}'$, а через $\beta' : \mathcal{F}' \to \mathcal{E}$ морфизм, индуцированный морфизмом $\mathcal{F} \oplus \mathcal{E}'' \xrightarrow{\beta \oplus 0} \mathcal{E}$.

Упражнение 4.8. **(1)** Последовательность

$$0 \to \mathcal{E}'' \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{F}' \xrightarrow{\beta'} \mathcal{E} \to 0$$

точна. **(2)** Применяя к этой точной последовательности функтор $\mathrm{Hom}(\,-\,,\mathcal{E}'')$ мы получим длинную точную последовательность, в которую входит морфизм $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}',\mathcal{E}'') \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}'')$. Проверьте, что при этом морфизме f переходит в $\varepsilon(\mathcal{F}')$.

Доказательство теоремы: Нам надо по элементу $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ построить расширение $\mathcal{F}$, такое что $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{F})$. Всопользуемся теоремами Картана A и B. Выберем $n \in \mathbb{Z}$ так, чтобы пучок $\mathcal{E}(n)$ порождался глобальными сечениями, и чтобы $\mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}'(n)) = 0$. Пусть $\mathcal{E}'' = \mathrm{Ker}(\Gamma(X,\mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}(-n) \to \mathcal{E})$. Применяя к точной последовательности

$$0 \to \mathcal{E}'' \to \Gamma(X,\mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}(-n) \to \mathcal{E} \to 0$$

функтор $\mathrm{Hom}(\,-\,,\mathcal{E}')$ получаем точную последовательность

$$\dots \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}'',\mathcal{E}') \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}') \to \mathrm{Ext}^1(\Gamma(X,\mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}(-n),\mathcal{E}') \to \dots$$

Заметим, что

$$\mathrm{Ext}^1(\Gamma(X,\mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}(-n),\mathcal{E}') \cong \Gamma(X,\mathcal{E}(n))^* \otimes \mathrm{H}^1(X,\mathcal{E}'(n)) = 0,$$

значит найдется $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}'',\mathcal{E}')$, который переходит в ε. Теперь применяя Упр. 4.8 получаем искомое расширение. □

4.5. **Пример неразложимых расслоений на $\mathbb{P}^2$.** Теперь, наконец, мы можем приступить к построению примера неразложимого расслоения на $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^2$.

Возьмем набор $\bar{x} = (x_1,\dots,x_m)$ попарно различных точек в $\mathbb{P}^2$. Пусть $J_{\bar{x}}$ пучок идеалов подмногообразия $\bar{x}$ (см. 3.3 (3)). Будем искать расслоение E в виде расширения

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to J_{\bar{x}} \to 0. \tag{4.9}$$

Согласно теореме 4.7 они описываются пространством $\mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O})$. Вычислим его. Для этого используем точные последовательности

$$0 \to J_{\bar{x}} \to \mathcal{O} \to \oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i} \to 0, \tag{4.10}$$

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{(\eta_i,-\xi_i)} \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{(\xi_i,\eta_i)} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{x_i} \to 0, \tag{4.11}$$

где $\xi_i, \eta_i \in V^*$ — уравнения точки x_i. Применяя к (4.11) функтор $\mathrm{Hom}(\,-\,,\mathcal{O})$ и пользуясь теоремой Ботта получаем комплекс

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{(\xi_i,\eta_i)} V^* \oplus V^* \xrightarrow{(\eta_i,-\xi_i)} \mathbf{S}^2 V^* \to 0,$$

вычисляющий функторы $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O})$. Отсюда получаем

$$\mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } p = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Следовательно

$$\mathrm{Ext}^p(\oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O}) = \begin{cases} \mathbb{C}^m, & \text{при } p = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь, применяем функтор $\mathrm{Hom}(\,-\,, \mathcal{O})$ к (4.10). Получаем

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(J_{\bar{x}}, \mathcal{O}) \to 0 \to 0 \to \mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}}, \mathcal{O}) \to \mathbb{C}^m \to 0 \to \mathrm{Ext}^2(J_{\bar{x}}, \mathcal{O}) \to 0.$$

Отсюда

$$\mathrm{Ext}^p(J_{\bar{x}}, \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } p = 0 \\ \mathbb{C}^m, & \text{при } p = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = (1, 1, \dots, 1) \in \mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}}, \mathcal{O}) = \oplus_{i=1}^m \mathbb{C}$.

Теорема 4.12. *Пусть E расширение пучка $J_{\bar{x}}$ с помощью $\mathcal{O}$, соответствующее ε. Тогда E — неразложимое векторное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$.*

Доказательство неразложимости: Чтобы проверить неразложимость E вычислим его когомологии. Применяя к (4.10) функтор $\Gamma(\mathbb{P}^2, -)$ и пользуясь теоремой Ботта и Упр. 4.5 (2) получаем

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^2, J_{\bar{x}}) = \begin{cases} \mathbb{C}^{m-1}, & \text{при } p = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Следовательно, из определения E получаем

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^2, E) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } p = 0 \\ \mathbb{C}^{m-1}, & \text{при } p = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Однако, по теореме Ботта у всякого разложимого расслоения на $\mathbb{P}^2$ первые когомологии зануляются, следовательно E неразложимо. $\square$

Остается доказать, что пучок E локально свободен. Это будет сделано в следующий раз с использованием функторов $\mathcal{E}xt$.