5. Тип расщепления расслоений на $\mathbb{P}^n$.

5.1. **Функторы $\mathcal{E}xt$.** Напомним, что мы определили функтор $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}^*$ равенством $\Gamma(U, \mathcal{E}^*) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{O}(U))$. Легко обобщить это определение, заменив в последнем равенстве $\mathcal{O}$ произвольным пучком. Мы получим определение пучка локальных гомоморфизмов: пучок $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{F}(U))$. (по модулю пучковизации, то есть равенство выполнено только для маленьких открытых множеств). Таким образом, функтор $\mathcal{H}om$ локально устроен как функтор Hom в категории модулей над кольцом. Следовательно, он точен слева и имеет правые производные функторы, которые обозначаются $\mathcal{E}xt^p$ и с точностью до пучковизации задаются равенствами

$$\mathcal{E}xt^p(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) = \mathrm{Ext}(\mathcal{E}(U), \mathcal{F}(U)).$$

Отсюда легко выводится

Упражнение 5.1. Пусть $\mathcal{E}$ локально свободен. **(1)** Покажите, что для любого пучка $\mathcal{F}$ имеем $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}$ и $\mathcal{E}xt^{>0}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$. **(2)** Проверьте, что для любых пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ имеем $\mathcal{E}xt^p(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^p(\mathcal{F}, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{G})$.

Функторы Hom и $\mathcal{H}om$ по определению связаны соотношением

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})).$$

К сожалению, оба функтора Γ и $\mathcal{H}om$ не точны, поэтому связь между функторами $\mathrm{Ext}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ и $\mathcal{E}xt(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ вообще говоря не тривиальна. Однако, есть несколько исключений.

Упражнение 5.2. **(1)** Покажите, что если $\mathcal{E}$ локально свободен, то для любого $\mathcal{F}$ имеем $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^p(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}))$. **(2)** Покажите, что любых пучков $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, такое что при $k \geq k_0$ имеем

$$\mathrm{Ext}^p(\mathcal{E}, \mathcal{F}(k)) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^p(\mathcal{E}, \mathcal{F})(k)).$$

В общем же случае связь функторов дается некторой спектральной последовательностью.

Упражнение 5.3. Постройте точную последовательность

$$0 \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \mathcal{F})) \to \mathrm{H}^2(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})).$$

Важным примером использования функторов $\mathcal{E}xt$ является теорема.

Теорема 5.4. *Пучок $\mathcal{E}$ локально свободен $\iff \mathcal{E}xt^{>0}(\mathcal{E}, \mathcal{O}) = 0$.*

Доказательство: Необходимость условия очевидна (см. Упр. 5.1). Докажем достаточность. Допустим $\mathcal{E}xt^{>0}(\mathcal{E}, \mathcal{O}) = 0$. Это значит, что каждая точка $x \in X$ имеет окрестность $x \in U$, такую что $\mathcal{E}(U)$ является проективным модулем над $\mathcal{O}(U)$. Значит $\mathcal{E}(U)$ является прямым слагаемы в свободном модуле:

$$\mathcal{O}(U)^{\oplus n} \cong \mathcal{E}(U) \oplus M.$$

Пусть $p : \mathcal{O}(U)^{\oplus n} \to \mathcal{O}(U)^{\oplus n}$ — проектор на $\mathcal{E}(U)$. Гомоморфизм p задается матрицей размера $n \times n$ и ранга r. Рассмотрим все возможные миноры m_{IJ} размера $r \times r$ этой матрицы. Легко показать, что при ограничении на открытое подмножество $U_{IJ} = U \setminus \{m_{IJ} = 0\}$ проектор p индуцирует изоморфизм $\oplus_{j \in J} \mathcal{O}(U_{IJ}) \to \mathcal{E}(U_{IJ})$. Но множества U_{IJ} покрывают все U, слеовательно пучок $\mathcal{E}$ локально свободен на U. Значит он локально свободен и на всем X. $\square$

Применим теорему 5.4 для доказательства локальной свободности пучка E, построенного в разделе 4.5. Нам надо вычислить $\mathcal{E}xt^p(E,\mathcal{O})$. Применяя функтор $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O})$ к точной последовательности (4.11) получаем комплекс

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{(\xi_i,\eta_i)} \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \xrightarrow{(\eta_i,-\xi_i)} \mathcal{O}(2) \to 0$$

вычисляющий функторы $\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O})$. Этот комплекс изоморфен комплексу (4.11), подкрученному на $\mathcal{O}(2)$, поэтому

$$\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_{x_i},\mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{O}_{x_i}(2) \cong \mathcal{O}_{x_i}, & \text{при } p=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(мы воспользовались Упр. 4.5). Далее, применяя функтор $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O})$ к точной последовательности (4.10) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{H}om(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to 0 \to 0 \to \mathcal{E}xt^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i} \to 0 \to \mathcal{E}xt^2(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) \to 0.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}xt^p(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{O}, & \text{при } p=0 \\ \oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i}, & \text{при } p=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Применяя $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O})$ к последовательности (4.9) получаем

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{H}om(E,\mathcal{O}) \to \mathcal{O} \xrightarrow{\varepsilon'} \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i} \to \mathcal{E}xt^1(E,\mathcal{O}) \to 0 \to 0 \to \mathcal{E}xt^2(E,\mathcal{O}) \to 0.$$

Значит, достаточно проверить, что морфизм ε' сюрьективен.

Поскольку в нашем случае $\mathrm{H}^{>0}(\mathbb{P}^2, \mathrm{Hom}(J_{\bar{x}},\mathcal{O})) = 0$, то точная последовательность из Упр. 5.3 дает изоморфизм $\mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O}) = \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{E}xt^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O}))$. Легко видеть, что морфизм ε' соответствует глобальному сечению пучка $\oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{E}xt^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O})$, задаваемому элементом $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1(J_{\bar{x}},\mathcal{O})$. Значит $\varepsilon' = (1,1,\dots,1,1)$, следоватльно ε' сюрьективен.

5.2. **Функтор обратного образа.** Пусть $f : Y \to X$ морфизм алгебраических многообразий, а (E,π) — векторное расслоение на X. Определим векторное расслоение (f^*E, π_{f^*E}) на Y следующим способом

$$f^*E = E \times_X Y = \{(e,y) \in E \times Y \mid \pi_E(e) = f(y)\}, \qquad \pi_{f^*E}(e,y) = y.$$

Упражнение 5.5. **(1)** Покажите, что f^* — функтор. **(2)** Проверьте, что если расслоение E задается в покрытии U_i коциклом $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, то f^*E задается в покрытии $f^{-1}(U_i)$ коциклом $g_{ij} \cdot f : f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. **(3)** Проверьте, что $f^*(E \oplus F) \cong f^*E \oplus f^*F$, $f^*(E \otimes F) \cong f^*E \otimes f^*F$, $f^*(E^*) \cong (f^*E)^*$. **(4)** Докажите, что $f^*\mathcal{O} \cong \mathcal{O}$. **(5)** Пусть $i : \mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ — линейное вложение проективных пространств. Покажите, что $i^*\mathcal{O}(k) \cong \mathcal{O}(k)$.

Чтобы продолжить функтор f^* до функтора $f^* : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(Y)$ надо вычислить $\Gamma(U, f^*E)$. Допустим, что $f(U) \subset U' \subset X$ и расслоение E тривиализуется на U'. Пусть $e_1,\dots,e_r$ — базис сечений E на U'. Тогда легко видеть, что $f^*e_1,\dots,f^*e_r$ — базис сечений расслоения f^*E на U. Значит

$$\Gamma(U, f^*E) \cong \mathcal{O}(U)^{\oplus^r} \cong \mathcal{O}(U')^{\oplus r} \otimes_{\mathcal{O}(U')} \mathcal{O}(U) \cong \Gamma(U', E) \otimes_{\mathcal{O}(U')} \mathcal{O}(U),$$

где структура $\mathcal{O}(U')$-модуля на $\mathcal{O}(U)$ задается гомоморфизмом $\phi \in \mathcal{O}(U') \mapsto \phi \cdot f \in \mathcal{O}(U)$.

Значит, естественно определить функтор f^* на пучках следующим образом. Пусть $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X)$. Рассмотрим Пусть $U \subset Y$ — открытое подмножество, так что $f(U) \subset U' \subset X$ и U' аффинно. Положим

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U')} \mathcal{O}(U)$$

и определим пучок $f^*\mathcal{E}$ как пучок, ассоциированный с предпучком $\mathcal{F}$.

Упражнение 5.6. **(1)** Покажите, что из когерентности пучка $\mathcal{E}$ следует корректность определения предпучка $\mathcal{F}$ и когерентность пучка $f^*\mathcal{E}$. **(2)** Проверьте, что f^* функтор. **(3)** Проверьте, что если $\mathcal{E}$ — локально свободен, то и $f^*\mathcal{E}$ — локально свободен. **(4)** Докажите, что $f^*(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}') \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$, $f^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}') \cong f^*\mathcal{E} \otimes f^*\mathcal{E}'$. **(5)** Покажите, что если $g : Z \to Y$, то имеем изоморфизм функторов $(fg)^* = g^*f^*$.

Легко привести пример, когда $(f^*\mathcal{E})^* \ncong f^*(\mathcal{E}^*)$. А именно, если $Y = x \in X$ и $\mathcal{E} = \mathcal{O}_x$, то легко показать, что $(f^*\mathcal{O}_x)^* \cong \mathcal{O}$, в то время как $f^*(\mathcal{O}_x^*) = 0$.

Если Y — замкнутое подмногообразие в X, то морфизм $i : Y \to X$ называется замкнутым вложением. Для замкнутого вложения пучок $i^*\mathcal{E}$ обозначается также через $\mathcal{E}_{|Y}$ и называется ограничением пучка $\mathcal{E}$ на подмногообразие Y.

5.3. **Производные функторы.** Из определения следует, что функтор f^* локально устроен как функтор тензорного умножения над кольцом. Поэтому он точен справа и имеет левые производные функторы L^pf^*, которые с точностью до пучковизации задаются равенствами

$$(L^pf^*\mathcal{E})(U) = \mathrm{Tor}^p_{\mathcal{O}(U')}(\mathcal{E}(U), \mathcal{O}(U')), \quad f(U) \subset U', \quad U' \text{ —аффинно.}$$

Упражнение 5.7. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок. **(1)** Проверьте, что $L^{>0}f^*\mathcal{E} = 0$. **(2)** Докажите, что для любого пучка $\mathcal{F}$ имеется изоморфизм функторов $L^pf^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \cong f^*\mathcal{E} \otimes L^pf^*\mathcal{F}$.

5.4. **Тип расщепления векторных расслоений.** Прямой L в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ называется линейное вложение $L \cong \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$. Ясно, что множество всех прямых в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ это грассманиан $\mathrm{Gr}(2; V)$. Обозначим его для краткости через $\mathbb{G}_n$.

Пусть E расслоение ранга r на $\mathbb{P}^n$. Для всякой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ рассмотрим ограничение $E_{|L}$. По теореме Гротендика имеем

$$E_{|L} \cong \mathcal{O}_L(a_1^E(L)) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_L(a_r^E(L)),$$

причем набор целых чисел $a_1^E(L) \geq \cdots \geq a_r^E(L)$ однозначно определен. Набор $a^E(L) = (a_1^E(L), \ldots, a_r^E(L))$ называется типом расщепления расслоения E на прямой L. Тип расщепления иногда удобно рассматривать как отображение

$$a^E : \mathbb{G}_n \to \mathbb{Z}^r.$$

Введем на $\mathbb{Z}^r$ лексикографический порядок, то есть $(a_1, \ldots, a_r) > (b_1, \ldots, b_r)$, если для некоторого $1 \leq s \leq r$ имеем

$$a_1 = b_1, \quad \ldots \quad , a_{s-1} = b_{s-1} \quad \text{и} \quad a_s > b_s.$$

В дальнейшем мы докажем важную теорему.

Теорема 5.8. **(1)** *Для всякого расслоения E на $\mathbb{P}^n$ множество $\{a^E(L)\}_{L \in \mathbb{G}_n}$ ограничено снизу.*
(2) *Для любого $a \in \mathbb{Z}^r$ множество $\{L \in \mathbb{G}_n \mid a^E(L) > a\} \subset \mathbb{G}_n$ — замкнуто.*

Обозначим через $\underline{a}^E$ минимум $a^E(L)$ по всем прямым $L \in \mathbb{G}_n$. Из теоремы 5.8 следует, что множество $U_E = \{L \in \mathbb{G}_n \mid a^E(L) = \underline{a}^E\}$ открыто. Поэтому $\underline{a}^E$ называется общим типом расщепления расслоения E. Всякая прямая $L \in S_E := \mathbb{G}_n \setminus U_E$ называется прямой подскока расслоения E.

Пример 5.9. Если $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r)$ — полностью расщепимое расслоение, то очевидно для любой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ имеем $a^E(L) = a$. Значит $\underline{a}^E = a$, $U_E = \mathbb{G}_n$ и $S_E = \emptyset$.

Рассмотрим теперь расслоение E, построенное в разделе 4.5. Вычислим $a^E(L)$ для всякой прямой $L \in \mathbb{G}_2$. Пусть $i : L \to \mathbb{P}^2$ — вложение. Начнем с вычисления $L^p i^* \mathcal{O}_{x_i}$. Применим для этого функтор i^* к резольвенте (4.11) из раздела 4.5. Мы получим комплекс

$$0 \to \mathcal{O}_L(-2) \xrightarrow{(\eta_i, -\xi_i)} \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(-1) \xrightarrow{(\xi_i, \eta_i)} \mathcal{O}_L \to 0,$$

когомологии которого равны $L^p i^* \mathcal{O}_{x_i}$. Легко показать, что если точка x_i не лежит на прямой L, то ξ_i и η_i не имеют общих нулей на прямой L и вышеуказанный комплекс точен, следовательно $L^p i^* \mathcal{O}_{x_i} = 0$. Если же точка x_i лежит на прямой L, то можно считать, что $\xi_{i|L} = 0$ и легко видеть, что $L^0 i^* \mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{O}_{x_i}$, $L^1 i^* \mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{O}_{x_i}(-1) \cong \mathcal{O}_{x_i}$ и $L^{>1} i^* \mathcal{O}_{x_i} = 0$. Допустим на прямой L лежит k точек из точек $x_1, \ldots, x_m$. Допустим это точки $x_1, \ldots, x_k$. Применяя функтор i^* к точной последовательности (4.10) получаем точную последовательность

$$\cdots \to 0 \to \oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i} \to i^* J_{\bar{x}} \to \mathcal{O}_L \to \oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i} \to 0$$

откуда легко следует

$$L^p i^* J_{\bar{x}} = \begin{cases} (\oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i}) \oplus \mathcal{O}_L(-k), & \text{при } p = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Применяя теперь функтор i^* к точной последовательности (4.9) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_L \to E_{|L} \to (\oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i}) \oplus \mathcal{O}_L(-k) \to 0.$$

По теореме Гротендика имеем $E_{|L} = \mathcal{O}_L(a) \oplus \mathcal{O}_L(b)$, $a \geq b$. Из теоремы Ботта легко следует, что $a \geq 0$, $b \leq -k$, следовательно эта точная последовательность распадается на две точные последовательности

$$0 \to \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_L(a) \to \oplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i} \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to 0 \to \mathcal{O}_L(b) \to \mathcal{O}_L(-k) \to 0,$$

откуда легко следует, что $a = k$, $b = -k$. Тем самым доказана теорема.

Теорема 5.10. *Пусть E — расслоение, построенное в разделе 4.5. Тогда $a^E(L) = (k, -k)$, где $k = \#(\{x_1, \ldots, x_m\} \cap L)$. В частности имеем $\underline{a}^E = (0, 0)$ и $U_E = \{L \in \mathbb{G}_2 \mid \{x_1, \ldots, x_m\} \cap L = \emptyset\}$.*

Наш последний пример — касательное расслоение T к $\mathbb{P}^n$. Легко показать, что $T = \mathcal{H}om(\mathcal{O}(-1), V \otimes \mathcal{O}/\mathcal{O}(-1)) \cong V \otimes \mathcal{O}(1)/\mathcal{O}$. Следовательно, имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\xi} V \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow T \to 0,$$

где $\xi = \mathrm{id}_V \in V \otimes V^* = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), V \otimes \mathcal{O}(1))$. Эта последовательность называется последовательностью Эйлера.

Теорема 5.11. *Для любой прямой $L \in \mathbb{G}_n$ имеем $a^T(L) = (2, 1, \ldots, 1)$.*

Доказательство: Ограничим последовательность Эйлера на прямую L. Все пучки в этой последовательности локально свободны, поэтому по Упр. 5.7 (1) мы получим точную последовательность расслоений на L

$$0 \to \mathcal{O}_L \to V \otimes \mathcal{O}_L(1) \to T_{|L} \to 0.$$

По теореме Гротендика имеем $T_{|L} = \mathcal{O}_L(a_1) \oplus \ldots \mathcal{O}_L(a_r)$. Высчисляя двумя способами $\dim \mathrm{H}^0(L, T_{|L})$ получаем $\sum_{i=1}^n a_i = n+1$. С другой стороны, из теоремы Ботта следует, что $\forall i \ a_i \geq 1$, следовательно $a^T(L) = (2, 1, \ldots, 1)$. $\square$

Упражнение 5.12. **(1)** Докажите, что при $n > 1$ имеем $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}^n, T(-2)) = 0$. **(2)** Докажите, что T не является полностью расщепимым.

Определение. Расслоение E на $\mathbb{P}^n$ называется равномерным, если отображение $a^E : \mathbb{G}_n \to \mathbb{Z}^r$ — постоянно.

Согласно 5.9 всякое полностью расщепимое расслоение равномерно. Заметим также, что расслоение E из раздела 4.5 является примером неравномерного расслоения.

5.5. **Однородные расслоения.** Заметим, что на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ действует группа $\mathrm{GL}(V)$. Всякий ее элемент $g \in \mathrm{GL}(V)$ задает автоморфизм $g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$.

Определение. Однородное (или эквивариантное) расслоение на $\mathbb{P}(V)$ — это расслоение E плюс изоморфизм $\phi_g : g^*E \to E$ для каждого $g \in \mathrm{GL}(V)$, так что для любых $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}(V)$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} g_1^* g_2^* E & \xrightarrow{g_1^*\phi_{g_2}} & g_1^* E \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{g_1}} \\ (g_2 g_1)^* E & \xrightarrow{\phi_{g_2 g_1}} & E \end{array}$$

Упражнение 5.13. **(1)** Покажите, что расслоения $\mathcal{O}(k)$ и T на $\mathbb{P}^n$ однородны. **(2)** Покажите, что всякий эквивариантный когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$ локально свободен. **(3)** Проверьте, что категория однородных расслоений (определите в ней морфизмы!) замкнута относительно операций $\oplus$, $\otimes$, *, а также относительно взятия ядер и коядер.

Обозначим через G_x стабилизатор точки $x \in \mathbb{P}^n$ в группе $\mathrm{GL}(V)$.

Упражнение 5.14. Докажите, что категория однородных расслоений на $\mathbb{P}^n$ эквивалентна категории представлений группы G_x.

Теорема 5.15. *Всякое однородное расслоение равномерно.*

Доказательство: Это легко следует из того, что группа $\mathrm{GL}(V)$ транзитивно действует на грассманиане $\mathbb{G}_n$. $\square$

Суммируя вышесказанное мы имеем следующие включения

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Полностью} \\ \text{расщепимые} \\ \text{расслоения} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{Однородные} \\ \text{расслоения} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{Равномерные} \\ \text{расслоения} \end{array} \right\}$$

причем теорема 5.11 показывает, что первое включение строгое. Позднее мы приведем пример равномерного неоднородного расслоения, и тем самым продемонстрируем, что второе включение тоже строгое.