6. Критерий Хоррокса.

Сегодня мы докажем критерий расщепимости расслоения на $\mathbb{P}^n$.

6.1. **Детерминант и степень.** Пусть E — векторное расслоение. В разделе 1.4 мы определили операцию тензорного произведения на расслоениях. Ясно, что на тензорной степени $E^{\otimes p}$ действует симметрическая группа перестановками сомножителей. Обозначим подрасслоения инвариантных и антиинвариантых сечений в расслоении $E^{\otimes p}$ через $\mathbf{S}^p E$ и $\Lambda^p E$ соответственно. Расслоения $\mathbf{S}^p E$ и $\Lambda^p E$ называеются симметрической и внешней степенью расслоения E.

Упражнение 6.1. **(1)** Покажите, что $r(\mathbf{S}^p E) = \binom{r(E)+p-1}{p}$, $r(\Lambda^p E) = \binom{r(E)}{p}$. **(2)** Найдите коциклы, задающие расслоения $\mathbf{S}^p E$ и $\Lambda^p E$. **(3)** Докажите, что $\mathbf{S}^p(E^*) = (\mathbf{S}^p E)^*$, $\Lambda^p(E^*) = (\Lambda^p E)^*$. **(4)** Покажите, что

$$\mathbf{S}^p(E_1 \oplus E_2) = \oplus_{i+j=p} \mathbf{S}^i E_1 \otimes \mathbf{S}^j E_2, \qquad \Lambda^p(E_1 \oplus E_2) = \oplus_{i+j=p} \Lambda^i E_1 \otimes \Lambda^j E_2.$$

(5) Пусть $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ — точная последовательность расслоений. Докажите, что расслоение $F_p = \mathbf{S}^p E$ (соотв. $F_p = \Lambda^p E$) обладает фильтрацией $0 \subset F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{p-1} \subset F_p$, такой что

$$F_j/F_{j-1} \cong \mathbf{S}^{p-j} E_1 \otimes \mathbf{S}^j E_2 \qquad (\text{соотв. } F_j/F_{j-1} \cong \Lambda^{p-j} E_1 \otimes \Lambda^j E_2).$$

(6) Покажите, что

$$\mathbf{S}^2(E \otimes F) = (\mathbf{S}^2 E \otimes \mathbf{S}^2 F) \oplus (\Lambda^2 E \otimes \Lambda^2 F), \quad \Lambda^2(E \otimes F) = (\mathbf{S}^2 E \otimes \Lambda^2 F) \oplus (\Lambda^2 E \otimes \mathbf{S}^2 F).$$

Если $r(E) = r$, то расслоение $\Lambda^r E$ (старшая внешняя степень) называется детерминантом расслоения E и обозначается через $\det E$. Согласно предыдущему упражнению $\det E$ — линейное расслоение, задаваемое коциклом $\det g_{ij}$.

Упражнение 6.2. **(1)** Докажите, что $\det(E^*) = (\det E)^*$. **(2)** Докажите, что $\det(E^*) \otimes \Lambda^p E = \Lambda^{r-p} E^*$. **(3)** Покажите, что $\det(E_1 \oplus E_2) = \det E_1 \otimes \det E_2$. **(4)** Пусть $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ — точная последовательность расслоений. Докажите, что $\det E = \det E_1 \otimes \det E_2$. **(5)** Покажите, что $\det(E \otimes F) = (\det E)^{\otimes r(F)} \otimes (\det F)^{\otimes r(E)}$. **(6)** Покажите, что $\det(E(k)) = (\det E)(k \cdot r(E))$. **(7)** Пусть $f : E \to F$ — морфизм расслоений одинакового ранга. Докажите, что f — изоморфизм, тогда и только тогда, когда $\det f : \det E \to \det F$ — изоморфизм.

Пусть E — расслоение на $\mathbb{P}^n$. Поскольку всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$ имеет вид $\mathcal{O}(k)$, то существует целое число d, такое что $\det E \cong \mathcal{O}(d)$. Число d называется степенью расслоения E и обозначается $\deg(E)$.

Упражнение 6.3. **(1)** Докажите, что $\deg(E^*) = -\deg(E)$. **(2)** Покажите, что $\deg(E_1 \oplus E_2) = \deg(E_1) + \deg(E_2)$. **(3)** Пусть $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ — точная последовательность расслоений. Докажите, что $\deg(E) = \deg(E_1) + \deg(E_2)$. **(4)** Покажите, что $\deg(E \otimes F) = \deg(E) r(F) + \deg(F) r(E)$. **(5)** Покажите, что $\deg(E(k)) = \deg(E) + k \cdot r(E)$.

Упражнение 6.4. Пусть $f : X \to Y$. **(1)** Покажите, что

$$f^*(E \otimes F) = f^* E \otimes f^* F,\ f^* \mathbf{S}^p E = \mathbf{S}^p f^* E,\ f^* \Lambda^p E = \Lambda^p f^* E,\ f^* \det E = \det f^* E.$$

(2) Проверьте, что если $X = \mathbb{P}(W)$, $Y = \mathbb{P}(V)$ и морфизм f индуцирован линейным вложением $W \to V$, то $\deg(f^* E) = \deg(E)$. **(3)** Докажите, что для любой прямой $L \subset \mathbb{P}^n$ и расслоения E на $\mathbb{P}^n$ имеем $a_1^E(L)+\dots+a_r^E(L) = \deg(E)$, где $a^E(L) = (a_1^E(L), \dots, a_r^E(L))$ — тип расщепления E на L.

Используя степень легко доказать первую часть теоремы 5.8.
Доказательство теоремы 5.8 (1): Пусть $\deg(E) = d$, $r(E) = r$. Определим числа a_i индуктивно, полагая

$$a_i = \left\lceil (d - \sum_{j=1}^{i-1} a_j)/(r-i+1) \right\rceil,$$

где $\lceil x \rceil$ обозначает минимальное целое число, больше или равное x. Очевидно, что набор $a = (a_1, \dots, a_r)$ минимальный среди наборов удовлетворяющих условиям

$$a_1 \ge a_2 \dots \ge a_r \qquad \text{и} \sum_{i=1}^{r} a_i = d.$$

Следовательно, согласно Упр. 6.4 (3) набор a является оценкой снизу для типа расщепления расслоения E. □

6.2. **Прямой образ пучка.** Пусть $f : X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий и $\mathcal{E}$ — пучок на X. Определим пучок $f_*\mathcal{E}$ на Y равенствами

$$(f_*\mathcal{E})(U) = \mathcal{E}(f^{-1}(U))$$

для любого открытого подмножества $U \subset Y$.

Упражнение 6.5. **(1)** Покажите, что $f_*\mathcal{E}$ — пучок. **(2)** Докажите, что f_* — точный слева функтор. **(3)** Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Докажите изоморфизм функторов $g_* f_* \cong (gf)_*$. **(4)** Покажите, что отображение $s \in \mathcal{O}_X(U) \mapsto (s \cdot f) \in \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = (f_*\mathcal{O}_Y)(U)$ определяет морфизм пучков колец $\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$. **(5)** Проверьте, что если $\mathcal{E}$ — пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей, то $f_*\mathcal{E}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. **(6)*** Докажите, что если пучок $\mathcal{E}$ квазикогерентен, то пучок $f_*\mathcal{E}$ тоже квазикогерентен.

Функтор f_* называется функтором прямого образа. Поскольку f_* точен слева было бы полезно определить правые производные функторы $R^i f_*$ — функторы высших прямых образов. Ситуация здесь аналогична ситуации с определением функторов когомологий H^i. Категория $\mathrm{Coh}(X)$ не содержит достаточного количество ацикличных относительно функтора f_* объектов, однако в категории $\mathrm{Sh}(X)$ таких объектов уже достаточно много. Поэтому можно воспользоваться вложением $\mathrm{Coh}(X) \subset \mathrm{Sh}(X)$ и определить функторы $R^i f_*$ в категории $\mathrm{Coh}(X)$ как ограничения соответствующих функторов с категории $\mathrm{Sh}(X)$. При этом оказывается, что определенные таким образом пучки $R^i f_*\mathcal{E}$ являются квазикогерентными.

Кроме того, как и в случае когомологий можно вычислять высшие прямые образы пучков по Чеху. Здесь удобнее всего воспользоваться пучковым комплексом Чеха (см. Упр. 4.4).

Определение. Морфизм $f : X \to Y$ называется аффинным, если $\forall y \in Y$ найдется окрестность $y \in U \subset Y$, такая что морфизм $f : f^{-1}(U) \to U$ раскладывается в композицию замкнутого вложения $i : f^{-1}(U) \to U \times \mathbb{A}^n$ и проекции $U \times \mathbb{A}^n \to U$.

Упражнение 6.6. **(1)** Покажите, что если X — аффинно, то $f : X \to Y$ — аффинный. **(2)** Проверьте, что замкнутое вложение является аффинным морфизмом.

Упражнение 6.7. **(1)** Докажите, что для аффинного морфизма функтор f_* на категории квазикогерентных пучков точен. **(2)** Докажите, что если f — произвольный морфизм, а $U_\bullet$ — аффинное покрытие, то $R^i f_*(\underline{\mathcal{C}}^p_{\mathcal{E}}) = 0$ для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{E}$ и $i > 0$. **(3)** Докажите, что пучок $R^i f_* \mathcal{E}$ изоморфен i-ым когомологиям комплекса $f_*(\underline{\mathcal{C}}^\bullet_{\mathcal{E}})$. **(4)** Покажите, что из (3) и из Упр. 6.5 (6) следует квазикогерентность пучков $R^i f_* \mathcal{E}$.

В отличие от функтора f^* функтор f_* вообще говоря не сохраняет подкатегорию локально свободных пучков. Более того, если пучок $\mathcal{E}$ — когерентный, то не накладывая ограничений на морфизм f нельзя даже гарантировать когерентность пучка $f_*\mathcal{E}$. Разумным ограничением является проективность морфизма.

Определение. Морфизм $f : X \to Y$ называется проективным, если $\forall y \in Y$ найдется окрестность $y \in U \subset Y$, такая что морфизм $f : f^{-1}(U) \to U$ раскладывается в композицию замкнутого вложения $i : f^{-1}(U) \to U \times \mathbb{P}^n$ и проекции $U \times \mathbb{P}^n \to U$.

Теорема 6.8. *Если морфизм f проективен, то пучок $R^i f_* \mathcal{E}$ когерентен для любого когерентного пучка $\mathcal{E}$ и любого i.*

Следующее упражнение демонстрирует связь функтора прямого образа с функтором когомологий.

Упражнение 6.9. Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. **(1)** Проверьте, что

$$R^i(gf)_* = \begin{cases} (R^i g_*) f_*, & \text{если морфизм } f \text{ — аффинный} \\ g_*(R^i f_*), & \text{если морфизм } g \text{ — аффинный.} \end{cases}$$

(2) Постройте точную последовательность

$$0 \to (R^1 g_*) f_* \mathcal{E} \to R^1(gf)_* \mathcal{E} \to g_*(R^1 f_* \mathcal{E}) \to (R^2 g_*) f_* \mathcal{E}$$

(3) Пусть $g : Y \to \mathrm{pt}$ — проекция в точку. Покажите, что $R^i g_* = \mathrm{H}^i(Y, -)$. **(4)** Докажите, что если f — аффинно, то $\mathrm{H}^i(Y, f_*\mathcal{E}) = \mathrm{H}^i(X, \mathcal{E})$. **(5)** Докажите, что если $U \subset Y$ — аффинно, то $(R^i f_* \mathcal{E})(U) = H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E})$.

6.3. **Формула проекции и сопряженность.** Пусть $f : X \to Y$ и $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$.

Теорема 6.10. *Для любого когерентного пучка $\mathcal{E}$ на Y имеем функториальный изоморфизм*

$$f_*(f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \cong \mathcal{E} \otimes f_*\mathcal{F}.$$

Доказательство: Возьмем произвольное аффинное подмножество $U \subset Y$ и обозначим $U' = f^{-1}(U)$. Тогда пользуясь определениями функторов f_*, f^* и $\otimes$ получаем

$$\Gamma(U, f_*(f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})) = \Gamma(U', f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = (f^*\mathcal{E})(U') \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{F}(U') =$$
$$= \Big(\mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_X(U')\Big) \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{F}(U') = \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{F}(U') =$$
$$= \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} (f_*\mathcal{F})(U) = \Gamma(U, \mathcal{E} \otimes f_*\mathcal{F})$$

$\square$

Упражнение 6.11. **(1)** Покажите, что $f_* f^* \mathcal{E} \cong \mathcal{E} \otimes f_* \mathcal{O}$. **(2)** Докажите, что если $\mathcal{E}$ — локально свободный, то $R^i f_*(f^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \cong \mathcal{E} \otimes R^i f_* \mathcal{F}$.

Пример 6.12. Пусть i — замкнутое вложение, а $\mathcal{E}$ — пучок на Y. Тогда $i_*(\mathcal{E}_{|X}) \cong \mathcal{E} \otimes i_* \mathcal{O}_X$.

Теорема 6.13 (Сопряженность функторов)**.** *Для любых пучков* $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(Y)$, $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ *существует изоморфизм функторов*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, f_* \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(f^* \mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

Доказательство: Выберем аффинное покрытие $Y = \bigcup U_i$ и пусть $U_i' = f^{-1}(U_i)$. Всякий морфизм $\phi : \mathcal{E} \to f_* \mathcal{F}$ — это набор морфизмов $\mathcal{O}_Y(U_i)$-модулей $\phi_i : \mathcal{E}(U_i) \to (f_* \mathcal{F})(U_i) = \mathcal{F}(U_i')$ согласованных на пересечениях множеств U_i. Тензорно умножая на $\mathcal{O}_X(U_i')$ над $\mathcal{O}_Y(U_i)$ и пользуясь структурой $\mathcal{O}_X(U_i')$-модуля на $\mathcal{F}(U_i')$ получаем морфизм

$$\psi_i : (f^* \mathcal{E})(U_i') = \mathcal{E}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(U_i') \to \mathcal{F}(U_i') \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(U_i') \to \mathcal{F}(U_i').$$

Ясно, что морфизмы ψ_i согласованы на пересечениях множеств U_i' и, следовательно, склеиваются в морфизм $\psi : f^* \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

Обратно, всякий морфизм $\psi : f^* \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ — это набор морфизмов $\mathcal{O}_X(U_i')$-модулей

$$\psi_i : \mathcal{E}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(U_i') = (f^* \mathcal{E})(U_i') \to \mathcal{F}(U_i') = (f_* \mathcal{F})(U_i).$$

Компонируя его с морфизмом $\mathcal{E}(U_i) \xrightarrow{(-\otimes 1)} \mathcal{E}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(U_i')$ получаем морфизм $\mathcal{O}_Y(U_i)$-модулей $\phi_i : \mathcal{E}(U_i) \to (f_* \mathcal{F})(U_i)$, причем морфизмы ϕ_i склеиваются в морфизм пучков $\phi : \mathcal{E} \to f_* \mathcal{F}$.

Остается заметить, что построенный изоморфизм функториален и не зависит от выбора покрытия. $\square$

6.4. **Критерий Хоррокса.** Следующая теорема называется критерием Хоррокса расщепимости расслоений.

Теорема 6.14. *Расслоение E на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ полностью расщепимо тогда и только тогда когда выполнено* условие Хоррокса

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0 \qquad \text{при } 1 \le p \le n-1 \text{ и любом } k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство: Необходимость условия Хоррокса легко следует из определения полностью расщепимого расслоения и теоремы Ботта.

Достаточность условия будем доказывать индукцией по размерности n проективного пространства. При $n = 1$ ввиду теоремы Гротендика доказывать нечего. Предположим, что $n > 1$, теорема Хоррокса доказана для $n - 1$ и для расслоения E на $\mathbb{P}^n$ выполнено условие Хоррокса. Выберем произвольную гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \cong H \subset \mathbb{P}^n$. Согласно 3.11 (2) имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to i_* \mathcal{O}_H \to 0.$$

Умножая ее на E и пользуясь 6.12, получаем точную последовательность

$$0 \to E(-1) \to E \to i_* i^* E \to 0. \tag{6.15}$$

Подкручивая последовательность (6.15) на $\mathcal{O}(k)$ и пользуясь длинной точной последовательностью когомологий, легко из условия Хоррокса для расслоения E доказать, что

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, i_*i^*E(k)) = 0 \quad \text{при } 1 \le p \le n-2 \text{ и любом } k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из Упр. 6.9 (3) и 6.6 (2) следует

$$\mathrm{H}^p(H, i^*E(k)) = 0 \quad \text{при } 1 \le p \le n-2 \text{ и любом } k \in \mathbb{Z}.$$

Значит расслоение i^*E на H удовлетворяет условиям Хоррокса, следовательно по предположению индукции существует изоморфизм $\phi : \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i) \to i^*E$.

Применим функтор $\mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), -)$ к точной последовательности (6.15). Получим точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), E) \to \mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), i_*i^*E) \to \mathrm{Ext}^1(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), E(-1))$$

Заметим, что $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(a), E(-1)) = H^1(\mathbb{P}^n, E(-a-1)) = 0$ по условию Хоррокса. Кроме того по теореме 6.13 имеем

$$\mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i), i_*i^*E) \cong \mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i), i^*E).$$

Это значит, что изоморфизм ϕ можно продолжить до морфизма $\Phi : \oplus\mathcal{O}(a_i) \to E$ расслоений на $\mathbb{P}^n$. Докажем, что Φ обязательно является изоморфизмом. Для этого воспользуемся Упр. 6.2 (7). Заметим, что

$$\deg(E) = \deg(i^*E) = \deg(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i)) = \sum_{i=1}^r a_i = \deg(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)),$$

следовательно $\det E \cong \det(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)) \cong \mathcal{O}(d)$. Так как $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(d), \mathcal{O}(d)) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$, то всякий морфизм $\mathcal{O}(d) \to \mathcal{O}(d)$ есть умножение на константу, поэтому достаточно проверить, что $\det\Phi$ не равен тождественно нулю. Но это очевидно: $(\det\Phi)_{|H} = \det\phi \ne 0$. $\square$

Критерий Хоррокса имеет неожиданное следствие.

Теорема 6.16. *Расслоение E на $\mathbb{P}^n$ вполне расщепимо тогда и только тогда, когда вполне расщепимо его ограничение на какую-либо плоскость $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n$.*

Доказательство: Необходимость условия очевидна, докажем достаточность. Ясно, что достаточно доказать, что при $n > 2$ расслоение E на $\mathbb{P}^n$ вполне расщепимо если вполне расщепимо его ограничение на какую-либо гиперплоскость $i : H \subset \mathbb{P}^n$. Допустим i^*E вполне расщепимо. Значит для расслоения i^*E выполнено условие Хоррокса. Но тогда из точной последовательности когомологий последовательности (6.15), подкрученной на $\mathcal{O}(k)$ следует, что для любого k индуцированный морфизм

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k-1)) \to \mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k))$$

является изоморфизмом при $2 \le p \le n-2$, вложением при $p = n-1$ и сюрьекцией при $p = 1$. Однако, по теореме Картана B при $k >> 0$ имеем $\mathrm{H}^{>0}(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$, значит при $2 \le p \le n-1$ и любом k имеем $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$. Аналогично, по теореме Картана B$'$ при $k << 0$ имеем $\mathrm{H}^{<n}(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$, значит при $1 \le p \le n-2$ и любом k имеем $\mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0$. Следовательно, для расслоения E выполнено условие Хоррокса, значит E вполне расщепимо. $\square$