8. Классы Чженя

8.1. **Классы когомологий подмногообразий.** Пусть X — гладкое проективное многообразие. Обозначим через $\mathrm{H}_\bullet(X,\mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z})$ группы сигулярных гомологий и когомологий многообразия X по модулю кручения. Всякому замкнутому подмногообразию $Y \subset X$ можно сопоставить его фундаментальный класс $o_Y \in \mathrm{H}_{2\dim Y}(X,\mathbb{Z})$. С другой стороны, двойственность Пуанкаре задает изоморфизм

$$\mathrm{H}_{2\dim Y}(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2\operatorname{codim} Y}(X,\mathbb{Z}).$$

Обозначим через $[Y] \in \mathrm{H}^{2\operatorname{codim} Y}(X,\mathbb{Z})$ образ фундаментального класса o_Y в когомологиях. Класс $[Y]$ называется классом когомологий подмногообразия Y.

Упражнение 8.1. (1) Покажите, что для всякого морфизма гладкого проективного морфизма $f : X \to X'$ двойственность Пуанкаре индуцирует гомоморфизм прямого образа

$$f_* : \mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2(\dim X' - \dim X)+\bullet}(X',\mathbb{Z}).$$

(2) Пусть $i : Z \to X$ — замкнутое вложение гладких многообразий. Докажите формулу проекции

$$i_* i^*[Y] = [Y] \cdot [Z].$$

Упражнение 8.2. (1) Покажите, что $\mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ при $0 \le i \le n$ и равно нулю в противном случае. **(2)** Проверьте, что $H^{2k}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^{n-k}]$. **(3)** Докажите изоморфизм градуированных алгебр $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[h]/h^{n+1}$, где $h = [\mathbb{P}^{n-1}] \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$ — класс гиперплоскости.

8.2. **Классы Чженя линейных расслоений.** Пусть $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на гладком проективном многообразии X. Рациональным сечением расслоения $\mathcal{L}$ называется сечение $\mathcal{L}$, определенное на открытом (по Зарисскому) подмножестве $U \subset X$. Обозначим множество рациональных сечений расслоения $\mathcal{L}$ через $\Gamma_{\mathrm{rat}}(X,\mathcal{L})$.

Лемма 8.3. *Для любого линейного расслоения $\mathcal{L}$ имеем $\Gamma_{\mathrm{rat}}(X,\mathcal{L}) \ne 0$.*

Доказательство: Пусть $i : X \to \mathbb{P}^n$ — вложение в проективное пространство. По теореме Картана A найдется $k \in \mathbb{Z}$, такое что $\Gamma(X, \mathcal{L} \otimes i^*\mathcal{O}(k)) = \Gamma(\mathbb{P}^n, (i_*\mathcal{L})(k) \ne 0)$. Пусть $0 \ne s \in \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes i^*\mathcal{O}(k))$ — произвольное ненулевое сечение. Выберем гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$, не содержащую $i(X)$. Пусть $z \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ — ее уравнение. Пусть $U = X - \{z = 0\} \subset X$. Тогда ясно, что s/z^k — определенное на U сечение расслоения $\mathcal{L}$. □

Определение. Определим первый класс Чженя линейного расслоения $\mathcal{L}$ как

$$\mathrm{c}_1(\mathcal{L}) = [\mathrm{div}_0(s)] - [\mathrm{div}_\infty(s)] \in \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}),$$

где $0 \ne s \in \Gamma_{\mathrm{rat}}(X,\mathcal{L})$ — произвольное рациональное сечение расслоения $\mathcal{L}$, а $\mathrm{div}_0(s) = \{s = 0\}$ и $\mathrm{div}_\infty(s) = \{s = \infty\}$ — дивизоры нулей и полюсов сечения s.

Теорема 8.4. *Определение $\mathrm{c}_1(\mathcal{L})$ корректно (не зависит от выбора сечения s). Кроме того,*

$$\mathrm{c}_1(\mathcal{L}^*) = \mathrm{c}_1(\mathcal{L}), \quad \mathrm{c}_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = \mathrm{c}_1(\mathcal{L}) + \mathrm{c}_1(\mathcal{L}'), \quad \mathrm{c}_1(\mathcal{L}) = f^*(\mathrm{c}_1(\mathcal{L})).$$

Доказательство: Допустим s' — другое рациональное сечение расслоения $\mathcal{L}$. Тогда $s' = s \cdot \phi$, где $\phi \in \Gamma_{\mathrm{rat}}(X, \mathcal{O})$ — рациональная функция на X. Ясно, что

$$\Big([\mathrm{div}_0(s')] - [\mathrm{div}_\infty(s')]\Big) - \Big([\mathrm{div}_0(s)] - [\mathrm{div}_\infty(s)]\Big) = [\mathrm{div}_0(\phi)] - [\mathrm{div}_\infty(\phi)],$$

поэтому достаточно проверить, что $[\mathrm{div}_0(\phi)] - [\mathrm{div}_\infty(\phi)] = 0$. Заметим, что ϕ задает отображение $X \to \mathbb{P}^1$, причем

$$[\mathrm{div}_0(\phi)] - [\mathrm{div}_\infty(\phi)] = \phi^*[\{0\}] - \phi^*[\{\infty\}] = \phi^*([\{0\}] - [\{\infty\}]) = 0$$

так как $[\{0\}] = [\{\infty\}] \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$.

Пусть теперь s и s' — рациональные сечения расслоений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$. Тогда ясно, что s^{-1}, $s \otimes s'$ и f^*s — рациональные сечения расслоений $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ и $f^*\mathcal{L}$ соответственно, откуда легко следуют все формулы. $\square$

Упражнение 8.5. Проверьте, что $\mathrm{c}_1(\mathcal{O}(k)) = k\,\mathrm{h}$.

8.3. **Проективизация расслоения.** Пусть E — векторное расслоение на X. Пусть U_i — тривиализующее покрытие для E, а $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ — соответствующий коцикл. Склеим теперь произведения $U_i \times \mathbb{P}^{r-1}$ с помощью коцикла g_{ij}, отождествляя

$$U_i \times \mathbb{P}^{r-1} \supset (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^{r-1} \xrightarrow{g_{ji}} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^{r-1} \subset U_j \times \mathbb{P}^{r-1}$$

Полученное многообразие обозначается через $\mathbb{P}_X(E)$ и называется проективизацией расслоения E. Легко видеть, что локальные проекции $p_i : U_i \times \mathbb{P}^{r-1} \to U_i$ склеиваются в проекцию $p_E : \mathbb{P}_X(E) \to X$.

Упражнение 8.6. **(1)** Проверьте, что определение многообразия $\mathbb{P}_X(E)$ и проекции p_E не зависит от выбора тривиализации расслоения E. **(2)** Покажите, что для любого линейного расслоения $\mathcal{L}$ на X имеем $\mathbb{P}_X(E \otimes \mathcal{L}) = \mathbb{P}_X(E)$, $p_{E \otimes \mathcal{L}} = p_E$. **(3)** Проверьте, что $\mathbb{P}_X(W \otimes \mathcal{O}_X) = X \times \mathbb{P}(W)$.

В отличие от локальных проекций p_i, локальные проекции $q_i : U_i \times \mathbb{P}^{r-1} \to \mathbb{P}^{r-1}$ вообще говоря не склеиваются, однако линейные подрасслоения расслоения $q_i^*\mathcal{O}(-1) \subset \mathbb{C}^r \otimes \mathcal{O}_{U_i \times \mathbb{P}^{r-1}} = p^*E_{|U_i}$ склеиваются в линейное подрасслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(-1) \subset p^*E$ — тавтологическое подрасслоение. Для краткости в тех случаях, когда это не может привести к путанице, мы будем вместо $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(-1)$ писать просто $\mathcal{O}(-1)$. Как обычно, $\mathcal{O}(1)$ обозначает двойственное линейное расслоение, а $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$.

Упражнение 8.7. **(1)** Покажите, что ограничение расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(1)$ на каждый слой $p^{-1}(x) = \mathbb{P}^{r-1}$ изоморфно расслоению $\mathcal{O}(1)$. **(2)** Проверьте, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E \otimes \mathcal{L})/X}(-1) = p^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(-1)$.

8.4. **Общее определение классов Чженя.** Обозначим

$$\xi = \xi_E = \mathrm{c}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(1)) \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}_X(E), \mathbb{Z}).$$

Из Упр. 8.7 (1) следует, что ограничение ξ на всякий слой $p^{-1}(x) = \mathbb{P}^{r-1}$ совпадает с классом $\mathrm{h} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{P}^{r-1}, \mathbb{Z})$. Следовательно, согласно Упр. 8.2 классы $1, \xi, \dots, \xi^{r-1}$ являются глобальными когомологическими классами на $\mathbb{P}_X(E)$, а их ограничения на всякий слой образуют базис в его когомологиях. Но отсюда по теореме Лере-Хирша следует, что

$$\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{P}_X(E), \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^\bullet(X, \mathbb{Z})\langle 1, \xi, \dots, \xi^{r-1} \rangle,$$

то есть кгомологии $\mathbb{P}_X(E)$ являются свободным модулем над когомологиями X с базисом $1, \xi, \ldots, \xi^{r-1}$. Рассмотрим элемент $\xi^r \in \mathrm{H}^{2r}(\mathbb{P}_X(E), \mathbb{Z})$. Согласно вышесказанному существует единственный набор когомологических классов $\mathrm{c}_i(E) \in \mathrm{H}^{2i}(X, \mathbb{Z})$ $(i = 1, \ldots, r)$, такой что

$$\xi_E^r + p_E^* \mathrm{c}_1(E) \cdot \xi_E^{r-1} + \cdots + p_E^* \mathrm{c}_r(E) = 0. \tag{8.8}$$

Классы $\mathrm{c}_i(E)$ называются классами Чженя расслоения E.

Теорема 8.9. *Общее определение классов Чженя согласовано с определением класса* $\mathrm{c}_1(\mathcal{L})$. *Кроме того, классы Чженя функториальны, то есть для всякого морфизма* $f : Y \to X$ *имеем* $\mathrm{c}_i(f^*E) = f^* \mathrm{c}_i(E)$.

Доказательство: Ясно, что $\mathbb{P}_X(\mathcal{L}) = X$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{L})/X}(-1) = \mathcal{L}$, следовательно $\xi = \mathrm{c}_1(\mathcal{L}^*) = -\mathrm{c}_1(\mathcal{L})$. Но тогда очевидно выполнено соотношение $\xi + \mathrm{c}_1(\mathcal{L}) = 0$, которое и означает согласованность старого и нового определения.

Докажем теперь функториальность. Пусть $f : Y \to X$. Тогда легко проверить, что $\mathbb{P}_Y(f^*E) = Y \times_X \mathbb{P}_X(E)$, $F^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)/X}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y(f^*E)}(1)$ (F обозначает проекцию $\mathbb{P}_Y(f^*E) \to \mathbb{P}_X(E)$), следовательно по теореме 8.4 имеем $F^*\xi_E = \xi_{f^*E}$. Применяя к $(*)$ функтор F^* и пользуясь соотношением $F^*p_E^* = p_{f^*E}^* f^*$ получаем уравнение

$$\xi_{f^*E}^r + p_{f^*E}^* f^* \mathrm{c}_1(E) \cdot \xi_{f^*E}^{r-1} + \cdots + p_{f^*E}^* f^* \mathrm{c}_r(E) = 0,$$

откуда следует $p_{f^*E}^*(\mathrm{c}_i(f^*E) - f^* \mathrm{c}_i(E)) = 0$, но так как $p_{f^*E}^*$ — вложение, то функториальность доказана. □

8.5. **Формула Уитни.** Одним из важнейших свойств классов Чженя является их поведение в точных последовательностях векторных расслоений. Для удобства определим полный класс Чженя расслоения E ранга r как

$$\mathrm{c}(E) = 1 + \mathrm{c}_1(E) + \cdots + \mathrm{c}_r(E) \in \mathrm{H}^{\bullet}(X, \mathbb{Z}).$$

Теорема 8.10 (Теорема Уитни). *Пусть* $0 \to E \to F \to G \to 0$ — *точная последовательность векторных расслоений. Тогда*

$$\mathrm{c}(F) = \mathrm{c}(E) \cdot \mathrm{c}(G).$$

Доказательство: Воспользуемся индукцией по рангу расслоения G. Рассмотрим сначала случай $r(G) = 1$. Пусть $r = r(E)$. Обозначим $Y = \mathbb{P}_X(F)$. Композиция $\mathcal{O}_{Y/X}(-1) \to p^*F \to p^*G$ дает сечение $s \in \Gamma(Y, (p^*G) \otimes \mathcal{O}_{Y/X}(1))$. Ясно, что множество нулей сечения s совпадает с подмногообразием $Z = \mathbb{P}_X(E) \subset \mathbb{P}_X(F) = Y$. Отсюда следует, что $[Z] = \mathrm{c}_1((p^*G) \otimes \mathcal{O}_{Y/X}(1)) = \xi_F + p^* \mathrm{c}_1(G)$. Рассмотрим следующие многочлены с коэффициентами в $\mathrm{H}^{\bullet}(X, \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^r + p^* \mathrm{c}_1(F) \cdot x^{r-1} + \cdots + p^* \mathrm{c}_r(F), \\ \tilde{p}(x) &= x^{r-1} + p^* \mathrm{c}_1(E) \cdot x^{r-2} + \cdots + p^* \mathrm{c}_{r-1}(E). \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathcal{O}_{Y/X}(1)_{|Z} = \mathcal{O}_{Z/X}(1)$, поэтому $(\xi_F)_{|Z} = \xi_E$. Значит $\tilde{p}(\xi_F)_{|Z} = \tilde{p}(\xi_E) = 0$, следовательно согласно Упр. 8.1 (2) имеем

$$0 = \tilde{p}(\xi_F) \cdot [Z] = \tilde{p}(\xi_F) \cdot (\xi_F + p^* \mathrm{c}_1(G)),$$

следовательно по определению классов Чженя $p(x) = \tilde{p}(x) \cdot (x + p^* \mathrm{c}_1(G))$. Подставляя $x = 1$ получаем $\mathrm{c}(F) = \mathrm{c}(E) \cdot \mathrm{c}(G)$, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что $r > 1$. Рассмотрим многообразие $X' = \mathbb{P}_X(G) \xrightarrow{p_G} X$. Обозначим через G' факторрасслоение $p_G^*G/\mathcal{O}_{X'/X}(-1)$, через F' ядро проекции $p_G^*E \to p_G^*G \to G'$. Тогда на многообразии X' имеются следующие точные последовательности расслоений:

$$0 \to \mathcal{O}_{X'/X}(-1) \to p_G^*G \to G' \to 0$$
$$0 \to F' \to p_G^*E \to G' \to 0$$
$$0 \to p_G^*F \to F' \to \mathcal{O}_{X'/X}(-1) \to 0$$

Заметим, что $r(G') < r(G)$, $r(\mathcal{O}_{X'/X}(-1)) = 1 < r(G)$. Из функториальности классов Чженя и предположения индукции получаем

$$\begin{aligned} p_G^* \mathrm{c}(E) &= \mathrm{c}(F') \cdot \mathrm{c}(G') = (p_G^* \mathrm{c}(F) \cdot \mathrm{c}(\mathcal{O}_{X'/X}(-1))) \cdot \mathrm{c}(G') = \\ &= p_G^* \mathrm{c}(F) \cdot (\mathrm{c}(\mathcal{O}_{X'/X}(-1)) \cdot \mathrm{c}(G')) = p_G^* \mathrm{c}(F) \cdot p_G^* \mathrm{c}(G) = p_G^*(\mathrm{c}(F) \cdot \mathrm{c}(G)), \end{aligned}$$

но так как p_G^* — вложение, то все доказано. $\square$

8.6. **Принцип расщепления.** Принцип расщепления гласит следующее

> *при вычислениях с классами Чженя расслоения E можно считать, что $E = \oplus_{i=1}^r L_i$ — сумма линейных расслоений*

В его основе лежит следующая теорема.

Теорема 8.11. *Пусть E — расслоение на многообразии X. Тогда существует многообразие $p : Y \to X$ и фильтрация подрасслоениями $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{r-1} \subset E_r = p^*E$, такие что для всякого i $L_i := E_i/E_{i-1}$ — линейное расслоение, функтор p^* дает вложение $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^\bullet(Y,\mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z})$ является целым расширением кольца $\mathrm{H}^\bullet(Y,\mathbb{Z})$.*

Доказательство: Воспользуемся индукцией по рангу $r = r(E)$. При $r = 1$ доказывать нечего (достаточно рассмотреть $Y = X$). Пусть $r > 1$. Рассмотрим $X' = \mathbb{P}_X(E) \xrightarrow{q} X$, $L = \mathcal{O}_{X'/X}(-1)$, $E' = q^*E/L$. Применим к паре (X', E') предположение индукции. Пусть $p' : Y \to X'$ и $0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_{r-1} = (p')^*E'$ — соответствующие многообразие и фильтрация. Пусть теперь $p = q \cdot p' : Y \to X$, $E_1 = (p')^*L$ и $E_i = \mathrm{Ker}(p^*E \to (p')^*E' \to (p')^*(E'/E'_{i-1})$ для всех $2 \le i \le r$. Тогда легко проверить, что полученное многообразие и фильтрация обладают необходимыми свойствами. $\square$

Обозначим $\mathrm{x}_i(E) = \mathrm{c}_1(L_i)$ — первые классы Чженя линейных расслоений из теоремы 8.11. Согласно теореме они лежат в некотором целом расширении кольца $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z})$. Классы $\mathrm{x}_i(E)$ называются корнями Чженя расслоения E.

Упражнение 8.12. **(1)** Докажите, что многочлен Чженя $\mathrm{c}_t(E) = 1 + \mathrm{c}_1(E)t + \cdots + \mathrm{c}_r(E)t^r$ раскладывается в произведение $\mathrm{c}_t(E) = \prod_{i=1}^r (1 + \mathrm{x}_i(E)t)$. **(2)** Докажите, что корни Чженя не зависят (по модулю перестановки) от выбора многообразия Y и фильтрации $E_\bullet$. **(3)** Покажите, что $\mathrm{c}_i(E) = \sigma_i(\mathrm{x}_1(E), \dots, \mathrm{x}_r(E))$, где σ_i — элементарный симметрический многочлен степени i. **(4)** Докажите, что $\mathrm{c}_i(E^*) = (-1)^i \mathrm{c}_i(E)$. **(5)** Выразите $\mathrm{c}_i(\Lambda^p(E))$ через $\mathrm{c}_i(E)$. **(6)** Докажите, что $\mathrm{c}_1(\det E) = \mathrm{c}_1(E)$. **(7)** Докажите, что c_1 аддитивен в точных последовательностях. **(8)** Проверьте, что на проективом пространстве $\mathrm{c}_1(E) = \deg(E)\,\mathrm{h}$.

8.7. **Равномерные расслоения малого ранга.**

Теорема 8.13. *Пусть E — равномерное расслоение на $\mathbb{P}^n$ и $r = r(E) < n$. Тогда E расщепимо.*

Доказательство: Воспользуемся индукцией по $r(E)$. При $r = 1$ доказывать нечего. Допустим $r > 1$. Пусть E имеет тип расщепления $a^E = (a_1, \dots, a_r)$. Подкручивая E можно считать, что $a_1 = 0$. Заметим, что если $a^E = (0, \dots, 0)$, то по теореме 7.10 имеем $E \cong \mathcal{O}^{\oplus r}$ и все доказано. Поэтому можно считать, что $a_1 = \dots = a_s = 0$, $a_{s+1} < 0$, где $1 \le s \le r-1$.

Воспользуемся стандартной диаграммой. Рассмотрим расслоение p^*E на многообразии $\mathbb{F}_n$. Ясно, что для всякой точки $L \in \mathbb{G}_n$ имеем

$$(p^*E)_{|q^{-1}(\{L\})} = (p^*E)_{|\widetilde{L}} = p^*(E_{|L}) = p^*(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_L(a_i)) = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_i).$$

Далее

$$\dim \mathrm{H}^0(\widetilde{L}, (p^*E)_{|\widetilde{L}}) = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)) = s,$$

значит мы можем использовать теорему о замене базы по отношению к расслоению q^*E и морфизму q. Из теоремы следует, что $F = q_*p^*E$ является расслоением на $\mathbb{G}_n$, причем $F_{|\{L\}} = \mathrm{H}^0(f^{-1}(\{L\}), p^*E)$. Отсюда следует, что каноническое отображение $q^*F \to p^*E$ является вложением на каждой прямой $\widetilde{L}$, то есть q^*F является подрасслоением в p^*E. Пусть $G = p^*E/q^*F$. Заметим, что по определению для любой прямой L имеем

$$(q^*F)_{|\widetilde{L}} = \mathcal{O}^{\oplus s}, \qquad G_{|\widetilde{L}} = \oplus_{i=s+1}^r \mathcal{O}(a_i). \tag{8.14}$$

Ограничивая точную последовательность

$$0 \to q^*F \to p^*E \to G \to 0$$

на произвольный слой $\mathbb{F}(x) = p^{-1}(x)$ получаем

$$0 \to (q^*F)_{|\mathbb{F}(x)} \to \mathcal{O}^{\oplus r} \to G_{|\mathbb{F}(x)} \to 0. \tag{8.15}$$

Следовательно, по теореме Уитни

$$\mathrm{c}((q^*F)_{|\mathbb{F}(x)}) \cdot \mathrm{c}(G_{|\mathbb{F}(x)}) = \mathrm{c}(\mathcal{O}^{\oplus r}) = 1.$$

Так как $\mathbb{F}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, то $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{F}(x), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\mathrm{h}]/\mathrm{h}^n$. Значит $\mathrm{c}((q^*F)_{|\mathbb{F}(x)})$ и $\mathrm{c}(G_{|\mathbb{F}(x)})$ являются многочленами от h степени s и $r-s$ соответственно. Их произведение имеет степень не выше r и равно 1 по модулю h^n, следовательно (так как $r < n$) оно равно 1 в кольце $\mathbb{Z}[\mathrm{h}]$, следовательно $\mathrm{c}((q^*F)_{|\mathbb{F}(x)}) = \mathrm{c}(G_{|\mathbb{F}(x)}) = 1$. Следовательно $\mathrm{c}_1((q^*F)_{|\mathbb{F}(x)}) = \mathrm{c}_1(G_{|\mathbb{F}(x)}) = 0$. Однако, из (8.15) следует, что расслоение $G_{|\mathbb{F}(x)}$ порождается глобальными сечениями, следовательно по теореме 7.11 имеем $G_{|\mathbb{F}(x)} \cong \mathcal{O}^{\oplus(r-s)}$. Аналогично $(q^*F)_{|\mathbb{F}(x)} \cong \mathcal{O}^{\oplus s}$.

Пользуясь теперь теоремой о замене базы легко показать, что $q^*F = p^*F'$, $G = p^*G'$ для некоторых расслоений F' и G' на $\mathbb{P}^n$, причем имеется точная последовательность

$$0 \to F' \to E \to G' \to 0.$$

Из формулы (8.14) следует, что F' и G' являются равномерными расслоениями, следовательно по предположению индукции они расщепимы, значит $F' = \mathcal{O}^{\oplus s}$, $G' = \oplus_{i=s+1}^r \mathcal{O}(a_i)$. Остается заметить, что

$$\mathrm{Ext}^1(G', F') = \oplus_{i=s+1}^r \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-a_i)) \otimes \mathbb{C}^s = 0$$

(по теореме Ботта), следовательно точная последовательность расщепима, то есть $E = F' \oplus G' = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$. $\square$