## Задачи.

1. а) Опишите тип расщепления расслоения нулевой корреляции $N$.

б) Докажите, что расслоение Танго на $\mathbb{P}^3$ изоморфно расслоению $N^*(1)$.

в) Опишите тип расщепления расслоения Танго на $\mathbb{P}^4$.

2. Рассмотрим вложение $i : C = \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $(u : v) \mapsto (u^3 : u^2 v : uv^2 : v^3)$. Кривая такого вида называется скрученной кубической кривой.

а) Постройте точную последовательность вида

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^3 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to i_* \mathcal{O}_C \to 0$$

(выпишите явно все отображения).

б) Докажите, что две скрученные кубики пересекаются тогда и только тогда, когда они лежат в общей кубической поверхности.

в) Докажите, что

$$T_{\mathbb{P}^3|C} \cong \mathcal{O}(4) \oplus \mathcal{O}(4) \oplus \mathcal{O}(4), \qquad N_{C/\mathbb{P}^3} \cong \mathcal{O}(5) \oplus \mathcal{O}(5).$$

3. Пусть $Y \subset X$ — гладкое подмногообразие. Докажите, что

$$\mathcal{E}xt^p(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \cong \Lambda^p \mathcal{N}_{Y/X}, \qquad \mathrm{Tor}_p(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \cong \Lambda^p \mathcal{N}^*_{Y/X}.$$

4. а) Опишите все линейные расслоения на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и найдите их когомологии.

б) Пусть $E$ — векторное расслоение на $\mathbb{P}^n$. Опишите все линейные расслоения на $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^n}(E)$ и найдите их прямые образы на $\mathbb{P}^n$.

в) Пусть $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(1,2;\mathbb{C}^3)$, $p : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{P}^2$, $q : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{G}_2 = \mathbb{P}^2$. Найдите $R^i q_* p^* \mathcal{O}(k)$.

5. Пусть $\mathcal{E}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^1$. Докажите, что существует единственная точная последовательность вида

$$0 \to \mathcal{O}(-1)^a \to \mathcal{O}^b \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}(-1)^c \to \mathcal{O}^d \to 0.$$