А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 1

Пусть $\Bbbk$ — коммутативное кольцо, A — произвольная коммутативная ассоциативная $\Bbbk$-алгебра с единицей, P и Q — A-модули.

Задача 1. Рассмотрим $\Bbbk$-модуль $\mathrm{Hom}_\Bbbk(P,Q)$. Докажите, что формулы

$$(a\Delta)(p) = a\Delta(p), \quad (a^+\Delta)(p) = \Delta(ap), \tag{1}$$

где $a \in A$, $p \in P$, $\Delta \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(P,Q)$, задают в $\mathrm{Hom}_\Bbbk(P,Q)$ две структуры A-модуля.

Задача 2. Определим отображения $\delta_{a_0,\dots,a_k}\colon \mathrm{Hom}_\Bbbk(P,Q) \to \mathrm{Hom}_\Bbbk(P,Q)$, $a_0,\dots,a_k \in A$, с помощью равенств

$$\delta_a(\Delta) = a^+\Delta - a\Delta, \qquad \delta_{a_0,\dots,a_k} = \delta_{a_0} \circ \ldots \circ \delta_{a_k}.$$

Докажите что $\delta_{a,b} = \delta_{b,a}$ и $\delta_{ab} = a^+\delta_b + b\delta_a$ для всех a, $b \in A$.

Определение 1. $\Bbbk$-гомоморфизм $\Delta\colon P \to Q$ называется *линейным дифференциальным оператором* порядка $\leqslant k$ над алгеброй A, если $\delta_{a_0,\dots,a_k}(\Delta) = 0$ для всех $a_0,\dots,a_k \in A$.

Задача 3. Докажите, что в случае $A = C^\infty(M)$, $P = C^\infty(\pi)$ и $Q = C^\infty(\xi)$, где M — гладкое многообразие, а $C^\infty(\pi)$ и $C^\infty(\xi)$ — модули сечений гладких векторных локально-тривиальных расслоений π и ξ над M, алгебраическое определение линейного дифференциального оператора совпадает с аналитическим.

Задача 4. Докажите, что множество всех дифференциальных операторов порядка $\leqslant k$, действующих из P в Q, образует подгруппу в $\mathrm{Hom}_\Bbbk(P,Q)$, замкнутую относительно обоих умножений (1). Полученные таким образом два модуля, обозначаются $\mathrm{Diff}_k(P,Q)$ и $\mathrm{Diff}_k^+(P,Q)$ соответственно. Проверьте, что $a(b^+\Delta) = b^+(a\Delta)$ для любых a, $b \in A$ и $\Delta \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(P,Q)$, т. е. множество дифференциальных операторов снабжена также структурой A-бимодуля (обозначаемого $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$). Убедитесь также, что $\mathrm{Diff}_0(P,Q) = \mathrm{Diff}_0^+(P,Q) = \mathrm{Hom}_A(P,Q)$.

Задача 5. Докажите, что композиция дифференциальных операторов порядка $\leqslant k$ и $\leqslant l$ является дифференциальным оператором порядка $\leqslant k+l$.

Задача 6. Докажите, что коммутатор $[\Delta_1,\Delta_2] = \Delta_1 \circ \Delta_2 - \Delta_2 \circ \Delta_1$ двух скалярных операторов $\Delta_1 \in \mathrm{Diff}_k(A,A)$ и $\Delta_2 \in \mathrm{Diff}_l(A,A)$ является дифференциальным оператором порядка $\leqslant k+l-1$.

Ниже будут использоваться обозначения: $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P) = \mathrm{Diff}_k^{(+)}(A,P)$ и $\mathrm{Diff}^{(+)}(P,Q) = \bigcup_{k\geqslant 0} \mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ (здесь мы пользуемся тем, что любой дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$ — это оператор порядка $\leqslant l$ для любого $l \geqslant k$ (Проверьте!), и, следовательно, имеются вложения $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q) \subset \mathrm{Diff}_l^{(+)}(P,Q)$).

Задача 7. Докажите, что в случае $A = C^0(M)$, где $C^0(M)$ — алгебра непрерывных функций на M, $\mathrm{Diff}(A)$ состоит их операторов нулевого порядка.

Задача 8. Пусть M — координатный крест на плоскости $\mathbb{R}^2$. Определим

$$C^\infty(M) = \{\, f \in C^0(M) \mid \exists \bar f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : f = \bar f\big|_M \,\}.$$

Опишите алгебру $\mathrm{Diff}(C^\infty(M))$ и докажите, что она не порождается операторами первого порядка.

Задача 9. Опишите алгебру $\mathrm{Diff}(A)$ в следующих случаях:

1) $A = \mathbb{Z}[x]/(x^n)$;
2) $A = \mathbb{Z}_m[x]/(x)$;
3) $A = \mathbb{Z}_m[x]/(x^n)$.

Задача 10. Докажите, что отображения

$$\imath^+ \colon \mathrm{Diff}_k(P,Q) \to \mathrm{Diff}^+_k(P,Q) \quad \text{и} \quad \imath_+ \colon \mathrm{Diff}^+_k(P,Q) \to \mathrm{Diff}_k(P,Q),$$

порожденные тождественным отображением множеств, являются дифференциальными операторами порядка $\leqslant k$.

Задача 11. Докажите, что отображение $\mathscr{D}_k = \mathscr{D}^Q_k \colon \mathrm{Diff}^+_k(Q) \to Q$, $\mathscr{D}(\Delta) = \Delta(1)$ является дифференциальным оператором порядка $\leqslant k$.

Задача 12. Пусть $A = Q = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выпишите координатное представление оператора $\mathscr{D}_k$ в этом случае.

Задача 13. Докажите универсальность оператора $\mathscr{D}_k$: для любого оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}^+_k(P,Q)$ существует единственным образом определенный гомоморфизм $\varphi_\Delta \colon P \to \mathrm{Diff}^+_k(Q)$, обладающий свойством $\Delta = \mathscr{D}_k \circ \varphi_\Delta$. Покажите, что соответствие $\Delta \mapsto \varphi_\Delta$ задает изоморфизм модулей $\mathrm{Diff}^+_k(P,Q) = \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Diff}^+_k(Q))$, (таким образом, функтор $\mathrm{Diff}^+_k(\cdot\,, Q)$ представим).

Задача 14. Рассмотрим гомоморфизм универсальной композиции, определенный диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}^+_k \mathrm{Diff}^+_l Q \arrow[r, "c_{k,l}"] \arrow[d, "\mathscr{D}_k"'] & \mathrm{Diff}^+_{k+l} Q \arrow[d, "\mathscr{D}_{k+l}"] \\
\mathrm{Diff}^+_l Q \arrow[r, "\mathscr{D}_l"] & Q
\end{tikzcd}$$

(см. задачи 11 и 13).

1) Докажите, что он задает естественное преобразование функторов $\mathrm{Diff}^+_k \mathrm{Diff}^+_l(\cdot) \Rightarrow \mathrm{Diff}^+_{k+l}(\cdot)$.
2) Сформулируйте и докажите его ассоциативность.

Задача 15. Опишите поэлементное действие гомоморфизма $c_{k,l}$ и его координатное представление в условиях задачи 12.

Задача 16. Diff-продолжения $\Delta_l \colon \mathrm{Diff}^+_l(P) \to Q$ дифференциального оператора $\Delta \colon P \to Q$ порядка $\leqslant k$ определяются как композиции $\Delta_l = \Delta \circ \mathscr{D}_l$. Эти продолжения порождают серию гомоморфизмов, определяемых коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}^+_l P \arrow[r, "\mathscr{D}_l"] \arrow[d, "\varphi^l_\Delta"'] & P \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathrm{Diff}^+_{k+l} Q \arrow[r, "\mathscr{D}_{k+l}"] & Q
\end{tikzcd}$$

(см. задачу 13). Пусть $A = P = Q = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выпишите координатное представление операторов Δ_l и гомоморфизмов φ^l_Δ.

Задача 17 (алгебра символов). Положим $\mathrm{Smbl}\, A = \bigoplus_{k=0}^\infty \mathrm{Smbl}_k A$, где $\mathrm{Smbl}_k A = \mathrm{Diff}^{(+)}_k A \big/ \mathrm{Diff}^{(+)}_{k-1}$ и через $\mathrm{Sm}_k \Delta$ обозначим класс смежности оператора Δ в $\mathrm{Smbl}_k A$. $\mathrm{Sm}_k \Delta$ называется *символом оператора* Δ. Докажите следующие утверждения:

1) Структуры модуля, индуцируемые в $\mathrm{Smbl}_k A$ из $\mathrm{Diff}_k A$ и $\mathrm{Diff}^+_k A$, совпадают;

2) Операция $\mathrm{Sm}\,\Delta \cdot \mathrm{Sm}\,\Delta' = \mathrm{Sm}(\Delta \circ \Delta')$ определяет в $\mathrm{Smbl}\,A$ структуру коммутативной A-алгебры (алгебра символов);
3) Операция $\{\mathrm{Sm}\,\Delta, \mathrm{Sm}\,\Delta'\} = \mathrm{Sm}([\Delta, \Delta'])$ (скобка Пуассона) определяет в $\mathrm{Smbl}\,A$ структуру $\Bbbk$-алгебры Ли;
4) Скобка Пуассона является бидифферецированием.

З а д а ч а 18. Пусть в задаче 17 $A = C^\infty(M)$.

1) Какова в этом случае геометрическая интерпретация алгебры символов?
2) Выпишите представление скобки Пуассона в локальных координатах.