А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 2

Определение 1. Рассмотрим A-модуль P и тензорное произведение $A \otimes_{\Bbbk} P$. В этом тензорном произведении введем структуру A-модуля, положив

$$a(b \otimes p) = (ab) \otimes p, \qquad a, b \in A, \quad p \in P,$$

и рассмотрим $\Bbbk$-линейное отображение $\epsilon\colon P \to A \otimes_{\Bbbk} P$, определенное формулой $\epsilon(p) = 1 \otimes p$. Обозначим через μ^k подмодуль в $A \otimes_{\Bbbk} P$, порожденный элементами вида $(\delta_{a_0,\dots,a_k}(\epsilon))(p)$, для всех $a_0, \dots, a_k \in A$ и $p \in P$. Фактормодуль $(A \otimes_{\Bbbk} P)/\mu^k$ называется *модулем k-джетов* модуля P и обозначается $\mathscr{J}^k(P)$.

Задача 1. Докажите, что отображение $j_k\colon P \to \mathscr{J}^k(P)$, сопоставляющее элементу $p \in P$ класс смежности $[1 \otimes p]$ в $(A \otimes_{\Bbbk} P)/\mu_k$, является дифференциальным оператором порядка $\leqslant k$.

Задача 2. Докажите, что для каждого дифференциального оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ существует единственным образом определенный гомоморфизм $\varphi^\Delta\colon \mathscr{J}^k(P) \to Q$, обладающий свойством $\Delta = \varphi^\Delta \circ j_k$, так что модуль k-джетов $\mathscr{J}^k(P)$ является представляющим объектом для функтора $P \Rightarrow \mathrm{Diff}_k(P, \cdot)$, $\mathrm{Diff}_k(P, Q) = \mathrm{Hom}_A(\mathscr{J}^k(P), Q)$.

Задача 3. Рассмотрим гомоморфизм $c^{k,l}$ универсальной кокомпозиции, определенный диаграммой

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{j_l} & \mathscr{J}^l(P) \\ {\scriptstyle j_{k+l}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_k} \\ \mathscr{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{c^{k,l}} & \mathscr{J}^k \mathscr{J}^l(P) \end{array}$$

(см. задачи 1 и 2).

1) Докажите, что он задает естественное преобразование функторов $\mathscr{J}^{k+l} \Rightarrow \mathscr{J}^k \mathscr{J}^l$.
2) Сформулируйте и докажите его коассоциативность.

Задача 4. Jet-продолжения $\Delta^l\colon P \to \mathscr{J}^l(Q)$ дифференциального оператора $\Delta\colon P \to Q$ порядка $\leqslant k$ определяются как композиции $\Delta^l = j_l \circ \Delta$. Эти продолжения порождают серию гомоморфизмов, определяемых коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{J}^{k+l}(P) & \xleftarrow{j_{k+l}} & P \\ {\scriptstyle \varphi_l^\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ \mathscr{J}^l(Q) & \xleftarrow{j_l} & Q \end{array}$$

Пусть $A = P = Q = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выпишите координатное представление операторов Δ^l и гомоморфизмов φ_l^Δ.

Определение 2. Элемент $X \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, P)$ называется *дифференцированием* алгебры A со значениями в модуле P, если он удовлетворяет правилу Лейбница

$$X(ab) = aX(b) + bX(b), \qquad a, b \in A.$$

Совокупность всех дифференцирований обозначается через $\mathrm{D}(P)$.

З а д а ч а 5. Проверьте, что всякое дифференцирование является дифференциальным оператором порядка $\leqslant 1$ и $\mathrm{D}(P)$ является подмодулем в $\mathrm{Diff}_1(P)$, $\mathrm{D}(P) \subset \mathrm{Diff}_1(P)$.

З а д а ч а 6. Пусть отображение $\mathrm{i}_k \colon A \to \mathscr{J}^k(A)$ сопоставляет элементу $a \in A$ класс смежности $[a \otimes 1]$ (ср. с задачей 1). Положим $\Lambda^1 = \mathscr{J}^1(A)/\operatorname{im}\mathrm{i}_1$ и определим отображение $d \colon A \to \Lambda^1$ как композицию j_1 с естественной проекцией $\mathscr{J}^1(A) \to \Lambda^1$. Докажите, что:

1) i_k — мономорфизм A-модулей.
2) d — дифференцирование.
3) Для каждого дифференцирования $X \in \mathrm{D}(P)$ существует единственным образом определенный гомоморфизм $\varphi^X \colon \Lambda^1 \to P$, обладающий свойством $X = \varphi^X \circ d$, так что модуль 1-форм Λ^1 является представляющим объектом для функтора $P \Rightarrow \mathrm{D}(P)$, $\mathrm{D}(P) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda^1, P)$.

З а д а ч а 7. Докажите, что $\mathscr{J}^1(A) = A \oplus \Lambda^1$.