А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 3

Определение 1. $\Bbbk$-линейное отображение $\nabla\colon A^{\otimes k} \to P$ называется *кососимметрическим полидифференцированием* алгебры A со значениями в A-модуле P, если выполнены следующие условия:

$$1)\ \nabla(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k) + \nabla(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_k) = 0,$$

$$2)\ \nabla(a_1, \dots, a_{i-1}, ab, a_{i+1}, \dots, a_k) = \\ = a\nabla(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_k) + b\nabla(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_k)$$

для всех a, b, $a_1, \dots, a_k \in A$ и любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Множество всех кососимметрических k-дифференцирований образует A-модуль, обозначаемый $\mathrm{D}_k(P)$: для любых $\nabla \in \mathrm{D}_k(P)$ и $a \in A$ положим $(a\nabla)(a_1, \dots, a_k) = a\nabla(a_1, \dots, a_k)$. По определению, $\mathrm{D}_0(P) = P$.

Задача 1. Докажите, что определение 1 равносильно следующему ¡¡функториальному¿¿ определению модулей $\mathrm{D}_k(P)$.

Определение 2. Предположим, что для всех $i \leqslant k$ построены функторы D_i на категории A-модулей и мономорфные естественные[1] операторы первого порядка $\gamma_i = \gamma_i(P)\colon\ \mathrm{D}_i(P) \to \mathrm{D}_{i-1}(\mathrm{Diff}_1^+(P))$. Рассмотрим композицию

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_1^+(P)) \xrightarrow{\gamma_k} \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_1^+(\mathrm{Diff}_1^+(P))) \xrightarrow{\mathrm{D}_{k-1}(c_{1,1})} \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_2^+(P))$$

и определим $\mathrm{D}_{k+1}(P)$ как ее ядро. Структуру A-модуля на $\mathrm{D}_{k+1}(P)$ введем воспользовавшись следующей конструкцией.

Задача 2. Пусть F — $\Bbbk$-линейный[2] функтор из категории A-модулей в категорию $\Bbbk$-модулей. Покажите, что в $\Bbbk$-модуле $\mathrm{F}(P)$ можно ввести структуру A-модуля, положив $a\dot{}q = (\mathrm{F}(a))(q)$, где $q \in \mathrm{F}(P)$ и $\mathrm{F}(a)\colon\ \mathrm{F}(P) \to \mathrm{F}(P)$ — гомоморфизм, соответствующий умножению на a: $p \mapsto ap$, $p \in P$. Обозначим полученный таким способом модуль через $\mathrm{F}\dot{}(P)$. Докажите, что любое естественное преобразование $\Delta(P)\colon\ \mathrm{F}(P) \to \mathrm{G}(P)$ индуцирует естественный гомоморфизм A-модулей $\Delta\dot{}(P)\colon\ \mathrm{F}\dot{}(P) \to \mathrm{G}\dot{}(P)$ (и, таким образом, его ядро всегда является A-модулем).

Задача 3. Докажите, что вложение $\gamma_{k+1}(P)\colon\ \mathrm{D}_{k+1}(P) \to \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_1^+(P))$ является естественным дифференциальным оператором первого порядка.

Таким образом, D_k и γ_k определены по индукции для всех k.

Задача 4. Докажите, что следующее, третье, определение модулей $\mathrm{D}_k(P)$ корректно и эквивалентно двум предыдущим.

[1] Отображение $\Delta = \Delta(P)\colon \mathrm{F}(P) \to \mathrm{G}(P)$, где F и G — функторы из категории A-модулей в категорию $\Bbbk$-модулей, называется *естественным*, если для любого гомоморфизма A-модулей $f\colon P \to Q$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}(P) \arrow[r, "\Delta(P)"] \arrow[d, "f(P)"'] & \mathrm{G}(P) \arrow[d, "f(Q)"] \\
\mathrm{F}(Q) \arrow[r, "\Delta(Q)"] & \mathrm{G}(Q)
\end{tikzcd}$$

[2] т. е. отображения $\mathrm{F}_{P,Q}\colon\ \mathrm{Hom}_A(P, Q) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{F}(P), \mathrm{F}(Q))$ линейны над $\Bbbk$ для всех A-модулей P и Q.

О п р е д е л е н и е 3. Построим по индукции последовательность A-модулей $\mathrm{D}_k(P)$ и мономорфных дифференциальных операторов $\mathrm{D}_k(P) \to (\mathrm{Diff}_1^+)^k(P)$ порядка $\leqslant 1$:

$$D_{k+1}(P) = \mathrm{D}_1(\mathrm{D}_k(P) \subset (\mathrm{Diff}_1^+)^k(P)),$$
$$D_{k+1}(P) \subset \mathrm{D}_1((\mathrm{Diff}_1^+)^k(P)) \subset (\mathrm{Diff}_1^+)^{k+1}(P),$$

где $\mathrm{D}_1(\mathrm{D}_k(P) \subset (\mathrm{Diff}_1^+)^k(P)) = \{\, \nabla \in \mathrm{D}_1((\mathrm{Diff}_1^+)^k) \mid \operatorname{im}\nabla \subset \mathrm{D}_k(P)\,\}$, а структура A-модуля на $\mathrm{D}_{k+1}(P)$ индуцирована A-модульной структурой на $\mathrm{D}_k(P)$.

О п р е д е л е н и е 4. Дифференциальный оператор $S\colon\ \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+(P)) \to \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_{l+1}^+(P))$ порядка $\leqslant 1$ равный композиции

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+(P)) \xrightarrow{\gamma_k} \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_1^+(\mathrm{Diff}_l^+(P))) \xrightarrow{\mathrm{D}_{k-1}(c_{1,l})} \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_{l+1}^+(P))$$

называется Diff-*оператором Спенсера.*

З а д а ч а 5. Покажите, что если $\nabla \in \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+(P))$, то

$$(S(\nabla))(a_1, \ldots, a_{k-1})(a) = \nabla(a_1, \ldots, a_{k-1}, a)(1).$$

З а д а ч а 6. Докажите, что $S^2 = 0$, т. е. последовательность операторов

$$0 \leftarrow P \xleftarrow{\mathscr{D}} \mathrm{Diff}^+(P) \xleftarrow{S} \mathrm{D}_1(\mathrm{Diff}^+(P)) \xleftarrow{S} \mathrm{D}_2(\mathrm{Diff}^+(P)) \leftarrow \ldots$$

является комплексом (Diff-*комплекс Спенсера*).

З а д а ч а 7. Докажите, что функтор D_k представим, $\mathrm{D}_k(P) = \mathrm{Hom}(\Lambda^k, P)$, причем представляющий объект Λ^k есть k-я внешняя степень модуля Λ^1.

З а д а ч а 8. Покажите, что представляющим объектом для функтора $\mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+)^{\boldsymbol{\cdot}}$ служит модуль $\mathscr{J}^l(\Lambda^k)$.

О п р е д е л е н и е 5. Оператор $d = \varphi^d \circ j_1\colon \Lambda^k \to \Lambda^{k+1}$, где $\varphi^d\colon\ \mathscr{J}^1(\Lambda^k) \to \Lambda^k$ — гомоморфизм представляющих объектов, отвечающий естественному преобразованию функторов $\gamma_{k+1}\colon\ \mathrm{D}_{k+1} \to \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_1^+)^{\boldsymbol{\cdot}}$, называется *оператором де Рама.*

З а д а ч а 9. Докажите, что гомоморфизмы $\varphi_l^d\colon\ \mathscr{J}^{l+1}(\Lambda^k) \to \mathscr{J}^l(\Lambda^{k+1})$, порожденные оператором d, двойственны Diff-операторам Спенсера.

З а д а ч а 10. Докажите, что $\Lambda^{k+1} = \operatorname{coker}\varphi_1^d$, где $\varphi_1^d\colon\ \mathscr{J}^2(\Lambda^{k-1}) \to \mathscr{J}^1(\Lambda^k)$.

З а д а ч а 11. Докажите, что $d^2 = 0$, т. е. последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \to \ldots \to \Lambda^k \xrightarrow{d} \Lambda^{k+1} \to \ldots$$

является комплексом (*комплекс де Рама*).

З а д а ч а 12. Из определения 1 следует, что для всякокго модуля P имеет место вложение $\mathrm{D}_{k+l}(P) \subset \mathrm{D}_k(\mathrm{D}_l(P))$. Покажите, что эти вложения определяют естественное преобразование функторов $\mathrm{D}_{k+l} \Rightarrow \mathrm{D}_k\,\mathrm{D}_l$, а соответствующий ему гомоморфизм представляющих объектов $\Lambda^l \otimes_A \Lambda^k \to \Lambda^{k+l}$ является внешним умножением.

З а д а ч а 13. Докажите, что для любых $\omega \in \Lambda^k$ и $\theta \in \Lambda^l$ имеет место равенство

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta$$

(*правило Лейбница*).

З а д а ч а 14. Пусть $A = C^\infty(\mathbb{R})$. Покажите, что $de^x - e^x\,dx \neq 0$.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть M — гладкое многообразие. Модуль P над $C^\infty(M)$ называется *геометрическим*, если

$$\bigcap_{x \in M} \mu_x P = 0,$$

где μ_x — идеал в $C^\infty(M)$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке $x \in M$.

З а д а ч а 15. Пусть $A = C^\infty(M)$. Покажите, что модуль Λ^1 не является геометрическим.

З а д а ч а 16. Пусть P — $C^\infty(M)$-модуль и

$$\mathscr{G}(P) = P \Big/ \bigcap_{x \in M} \mu_x P.$$

Докажите, что $\mathscr{G}(P)$ — геометрический модуль, а соответствие $P \Rightarrow \mathscr{G}(P)$ — функтор из категории всех $C^\infty(M)$-модулей в категорию $\mathscr{G}(M)$ геометрических $C^\infty(M)$-модулей.

З а д а ч а 17. Покажите, что категория геометрических модулей $\mathscr{G}(M)$ замкнута относительно тензорного произведения над $C^\infty(M)$ и относительно действия функторов $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P, \cdot)$, $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(\cdot\,, Q)$ и $\mathrm{D}_k(\cdot)$.

З а д а ч а 18. Докажите, что функторы $\mathrm{Diff}_k^{+}(\cdot\,, Q)$, $\mathrm{Diff}_k(P, \cdot)$ и $\mathrm{D}_k(\cdot)$ представимы в категории геометрических модулей $\mathscr{G}(M)$ и найдите их представляющие объекты (P и Q — геометрические модули).

З а д а ч а 19. Убедитесь, что комплекс де Рама, построенный в категории геометрических модулей $\mathscr{G}(M)$ изоморфен обычному комплексу де Рама на многообразии M.