А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 5

Напомним, что комплекс гомоморфизмов

$$\ldots \to \mathscr{J}^{l+1}(\Lambda^k) \xrightarrow{S} \mathscr{J}^{l}(\Lambda^{k+1}) \to \ldots \tag{1}$$

является представляющим объектом для Diff-комплекса Спенсера (Листок 3). Рассмотрим произвольные модули P и Q и отображение $\tau^l_{P,Q}\colon \mathscr{J}^l(P)\otimes_A Q \to \mathscr{J}^l(Q)\otimes_A P$, действующее по правилу $\tau^l_{P,Q}(j_l(p)\otimes q) = j_l(q)\otimes p$, $p\in P$, $q\in Q$. Очевидно, что

$$\tau^l_{P,Q}\circ\tau^l_{Q,P} = \mathrm{id}, \quad (\nu_{l,l-1}\otimes \mathrm{id}_Q)\circ\tau^l_{P,Q} = \tau^{l-1}_{P,Q}\circ(\nu_{l,l-1}\otimes\mathrm{id}_Q),$$

где $\nu_{l,l-1}\colon \mathscr{J}^l(P)\to\mathscr{J}^{l-1}(P)$ — естественная проекция.

Задача 1. Докажите, что $\tau^l_{P,Q}$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant l$.

Домножим комплекс (1) тензорно справа на модуль P и рассмотрим отображения

$$\mathscr{S}^P = \tau^l_{P,\Lambda^k}\circ S\circ\tau^{l-1}_{\Lambda^{k+1},P}\colon \mathscr{J}^l(P)\otimes_A\Lambda^k\to\mathscr{J}^{l-1}(P)\otimes_A\Lambda^{k+1}.$$

Задача 2. Докажите, что

1) Отображения $\mathscr{S}$ являются дифференциальными операторами первого порядка и действуют по правилу $\mathscr{S}(j_l(p)\otimes\omega) = j_{l-1}(p)\otimes d\omega$, $p\in P$, $\omega\in\Lambda^k$.
2) Последовательность

$$0\to P\xrightarrow{j_{k+l}}\mathscr{J}^{k+l}(P)\to\ldots\to\mathscr{J}^l(P)\otimes_A\Lambda^k\xrightarrow{\mathscr{S}^P}\mathscr{J}^{l-1}(P)\otimes_A\Lambda^{k+1}\to\ldots \tag{2}$$

является комплексом.

Определение 1. Комплекс (2) называется Jet-*комплексом Спенсера* модуля P.

Задача 3. Вычислите Jet-когомологии Спенсера для $P = A$, где A — алгебры из задач 8 и 9 в Листке 1.

Задача 4. Докажите, что Jet-операторы Спенсера перестановочны с проекциями $\nu_{l,l-1}$, т.е. коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{J}^l(P)\otimes_A\Lambda^k \arrow[r, "\mathscr{S}^P"] \arrow[d, "\nu_{l,l-1}\otimes\mathrm{id}"'] & \mathscr{J}^{l-1}(P)\otimes_A\Lambda^{k+1} \arrow[d, "\nu_{l-1,l-2}\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathscr{J}^{l-1}(P)\otimes_A\Lambda^k \arrow[r, "\mathscr{S}^P"] & \mathscr{J}^{l-2}(P)\otimes_A\Lambda^{k+1}
\end{tikzcd}$$

Задача 5. Докажите, что если алгебра A — гладкая, а модуль P — проективный конечного типа, то модули $\mathscr{J}^l(P)$ также проективны и имеют конечный тип.

Из последних задач следует, что в рассматриваемой ситуации возникает комплекс ядер, имеющий вид

$$\ldots\to\mathrm{Cosmbl}_l\,P\otimes_A\Lambda^k\xrightarrow{\delta^P}\mathrm{Cosmbl}_{l-1}\,P\otimes_A\Lambda^{k+1}\to\ldots, \tag{3}$$

который называется Jet *δ-комплексом Спенсера.*

Задача 6. В условиях предыдущей задачи

1) Опишите действие дифференциала δ^P.
2) Докажите ацикличность комплекса (3).
3) Получите отсюда ацикличность Jet-комплексов Спенсера.

Пусть $\Delta\colon P \to Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant s$. Рассмотрим его l-е Jet-продолжение $\Delta_l\colon P \to \mathscr{J}^l(Q)$ и соответствующие гомоморфизмы $\varphi_l^\Delta\colon \mathscr{J}^{s+l}(P) \to \mathscr{J}^l(Q)$.

З а д а ч а 7. Докажите, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J}^{s+l}(P)\otimes_A \Lambda^k \arrow[r, "\mathscr{S}^P"] \arrow[d, "\varphi_l^\Delta\otimes\mathrm{id}"'] & \mathscr{J}^{s+l-1}(P)\otimes_A \Lambda^{k+1} \arrow[d, "\varphi_{l-1}^\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\ \mathscr{J}^{l}(Q)\otimes_A \Lambda^k \arrow[r, "\mathscr{S}^Q"] & \mathscr{J}^{l-1}(Q)\otimes_A \Lambda^{k+1} \end{tikzcd}$$

коммутативны, т.е. Δ индуцирует коцепное отображение Jet-комплексов Спенсера.

О п р е д е л е н и е 2. Когомологии соответствующего ядерного комплекса называются Jet-*когомологиями Спенсера* оператора Δ.

З а д а ч а 8. Докажите, что если A — гладкая алгебра, то оператор $\Delta\colon P \to Q$ порождает коцепное отображение δ-комплесов Спенсера (3).

О п р е д е л е н и е 3. Когомологии соответствующего ядерного комплекса называются *δ-когомологиями Спенсера* оператора Δ.

З а д а ч а 9. Сформулируйте и докажите δ-лемму Пуанкаре для этих когомологий.

З а д а ч а 10 (внешнее умножение $\mathrm{D}_*(A)$). Рассмотрим A-модуль P и определим по индукции операцию *внешнего умножения*

$$\wedge\colon\ \mathrm{D}_i(A)\times \mathrm{D}_j(P) \to \mathrm{D}_{i+j}(P),$$

полагая $a\wedge p = ap$ при $i=j=0$, $a\in A$, $p\in P$, и

$$(\Delta\wedge\nabla)a = \Delta\wedge\nabla(a) + (-1)^\nabla \Delta(a)\wedge\nabla$$

при $i+j>0$ и $\Delta\in \mathrm{D}_i(A)$, $\nabla\in \mathrm{D}_j(A)$[1].

1) Докажите, что данное определение корректно, т.е. элемент $\Delta\wedge\nabla$ действительно лежит в $\mathrm{D}_{i+j}(P)$.
2) Докажите, что
   (a) Операция внешнего умножения A-линейна по обоим аргументам и для любых Δ, $\Delta'\in \mathrm{D}_*(A)$ и $\nabla\in \mathrm{D}_*(P)$ выполняются равенства
   (b) $\Delta\wedge(\Delta'\wedge\nabla) = (\Delta\wedge\Delta')\wedge\nabla$,
   (c) $\Delta\wedge\Delta' = (-1)^{\Delta\Delta'}\Delta'\wedge\Delta$,
   где $\mathrm{D}_*(\cdot) = \bigoplus_{i\geqslant 0}\mathrm{D}_i(\cdot)$.
3) Таким образом, $\mathrm{D}_*(A)$ является $\mathbb{Z}$-градуированной коммутативной алгеброй, а $\mathrm{D}_*(P)$ — градуированным модулем над ней. Покажите, что соответствие $P \Rightarrow \mathrm{D}_*(P)$ определяет функтор из категории A-модулей в категорию градуированных $\mathrm{D}_*(A)$-модулей.

З а д а ч а 11. Конструкция, приведенная в предыдущей задаче, имеет обобщение. Именно, если B — A-алгебра и P — модуль над B (а значит, и над A), то можно рассмотреть B-модули $\mathrm{D}_*^A(B)$ и $\mathrm{D}_*^A(P)$ полидифференцирований $A\to B$ и $A\to P$ соответственно. Покажите, что $\mathrm{D}_*^A(B)$ можно ввести структуру градуированной B-алгебры, в $\mathrm{D}_*^A(P)$ — структуру градуированного $\mathrm{D}_*^A(B)$-модуля.

---

[1]Здесь и далее символ элемента градуированного объекта в показателе степени обозначает его градуировку: $(-1)^\nabla \equiv (-1)^j$.

З а д а ч а 12 (внутреннее умножение). Поскольку модуль Λ^i является представляющим объектом функтора D_i, определено спаривание $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon\ \mathrm{D}_i(P)\times\Lambda^i\to P$. При этом любая форма $\omega\in\Lambda^i$ однозначно определяется всеми значениями $\langle\Delta,\omega\rangle$, $\Delta\in\mathrm{D}_i(P)$.

Рассмотрим дифференцирование $X\in\mathrm{D}_1(A)$ и определим форму $\mathrm{i}_X\omega\in\Lambda^{i-1}$ условием[2]

$$\langle\Delta,\mathrm{i}_X\omega\rangle=(-1)^{i-1}\langle X\wedge\Delta,\omega\rangle,$$

где $\Delta\in\mathrm{D}_{i-1}(P)$ — произвольное полидифференцирование. Операция i_X называется *внутренним умножением*, или *подстановкой*. Докажите, что она обладает следующими свойствами:

1) $\mathrm{i}_{aX}=a\mathrm{i}_X,\quad a\in A$,
2) $\mathrm{i}_X(\omega\wedge\theta)=\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\theta+(-1)^{\omega}\omega\wedge\mathrm{i}_X(\theta),\quad \omega,\,\theta\in\Lambda^*$,
3) $\mathrm{i}_X\omega=\langle X,\omega\rangle$, если $\omega\in\Lambda^1$,
4) $[\mathrm{i}_X,\mathrm{i}_Y]=0$, где через $[\cdot\,,\cdot]$ обозначен коммутатор градуированных отображений: $[F,G]=F\circ G-(-1)^{FG}G\circ F$.

З а д а ч а 13 (производная Ли). *Производной Ли* вдоль дифференцирования $X\in\mathrm{D}_1(A)$ называется отображение $\mathrm{L}_X=[d,\mathrm{i}_X]\colon\Lambda^i\to\Lambda^i$. Докажите, что производная Ли обладает следующими свойствами:

1) $[\mathrm{L}_X,d]=0$,
2) $\mathrm{L}_{aX}=a\mathrm{L}_X+da\wedge\mathrm{i}_X,\quad a\in A$,
3) $\mathrm{L}_X(\omega\wedge\theta)=\mathrm{L}_X(\omega)\wedge\theta+\omega\wedge\mathrm{L}_X(\theta),\quad \omega,\,\theta\in\Lambda^*$,
4) $[\mathrm{L}_X,\mathrm{i}_Y]=-[\mathrm{i}_X,\mathrm{L}_Y]=\mathrm{i}_{[X,Y]}$,
5) $[\mathrm{L}_X,\mathrm{L}_Y]=\mathrm{L}_{[X,Y]}$.

Понятия подстановки и производной Ли можно обобщить на произвольные полидифференцирования. Прежде чем делать это, мы приведем очевидное обобщение понятия дифференциального оператора.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $A=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i$ — коммутативная градуированная $\Bbbk$-алгебра и $P=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}P_i$, $Q=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}Q_i$ — градуированные A-модули. Рассмотрим модуль $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}^{\mathrm{gra}}(P,Q)$ градуированных гомоморфизмов и для любого $a\in A$ положим $\delta_a\Delta=\Delta\cdot a-(-1)^{\Delta a}a\cdot\Delta$, $\Delta\in\mathrm{Hom}_{\Bbbk}^{\mathrm{gra}}(P,Q)$. Отображение Δ называется *градуированным дифференциальным оператором* порядка $\leqslant k$, если

$$(\delta_{a_0}\circ\ldots\circ\delta_{a_k})\Delta=0$$

для любых $a_0,\ldots,a_k\in A$.

Замечание 1. Полезным упражнением является повторить все конструкции коммутативной теории для градуированных дифференциальных операторов.

З а д а ч а 14 (внутреннее умножение-2). Рассмотрим некоторое полидифференцирование $\nabla\in\mathrm{D}_j(A)$ и определим форму $\mathrm{i}_\nabla\omega\in\Lambda^{i-j}$, $\omega\in\Lambda^i$, условием

$$\langle\Delta,\mathrm{i}_\nabla\omega\rangle=(-1)^{(i-j)j}\langle\nabla\wedge\Delta,\omega\rangle,$$

где $\Delta\in\mathrm{D}_{i-j}(P)$ — произвольное полидифференцирование. Операция i_∇ называется *внутренним умножением*, или *подстановкой*. Докажите, что она обладает следующими свойствами:

1) $\mathrm{i}_{a\nabla}=a\mathrm{i}_\nabla$, $a\in A$,
2) отображение $\mathrm{i}_\nabla\colon\Lambda^*\to\Lambda^*$ является градуированным дифференциальным оператором порядка j,
3) $\mathrm{i}_\nabla\omega=\langle\nabla,\omega\rangle$, если $\omega\in\Lambda^j$,

[2] В дальнейшем запись $X\lrcorner\,\omega$ будет использоваться как синоним обозначения $\mathrm{i}_X\omega$.

4) $[\mathrm{i}_\nabla, \mathrm{i}_{\nabla'}] = 0$,
5) $\mathrm{i}_\nabla \circ \mathrm{i}_{\nabla'} = \mathrm{i}_{\nabla\wedge\nabla'}$,
6) $\mathrm{i}_a\omega = a\omega$, $a \in A$.

З а д а ч а 15 (производная Ли-2). *Производной Ли* вдоль полидифференцирования $\nabla \in \mathrm{D}_j(A)$ называется отображение $\mathrm{L}_X = [d, \mathrm{i}_\nabla] = d\circ\mathrm{i}_\nabla - (-1)^j \mathrm{i}_\nabla \circ d \colon \Lambda^i \to \Lambda^{i-j+1}$. Докажите, что производная Ли обладает следующими свойствами:

1) $[\mathrm{L}_\nabla, d] = 0$,
2) $\mathrm{L}_{\nabla\wedge\nabla'} = \mathrm{i}_\nabla \circ \mathrm{L}_{\nabla'} + (-1)^{\nabla'}\mathrm{L}_\nabla \circ \mathrm{i}_{\nabla'}$,
3) отображение $\mathrm{L}_\nabla \colon \Lambda^* \to \Lambda^*$ является градуированным дифференциальным оператором порядка j,
4) $\mathrm{L}_a\omega = da\wedge\omega$, $a \in A$.

Анализ тождества 5 из задачи 13 приводит к следующему важному понятию.

З а д а ч а 16 (скобки Схоутена–Нийенхейса). Определим по индукции операцию

$$[\![\cdot\,,\cdot]\!] \colon \mathrm{D}_i(A) \times \mathrm{D}_j(A) \to \mathrm{D}_{i+j-1}(A),$$

полагая

$$[\![\Delta, a]\!] = \Delta(a), \quad j = 0,\ a \in A, \qquad [\![b, \nabla]\!] = (-1)^{\nabla}\nabla(b), \quad i = 0,\ b \in A,$$

и

$$[\![\Delta, \nabla]\!](a) = [\![\Delta, \nabla(a)]\!] + (-1)^{\nabla-1}[\![\Delta(a), \nabla]\!]$$

при произвольных i, j.

Докажите, что элемент $[\![\Delta, \nabla]\!]$ определен корректно.

З а д а ч а 17. Докажите, что элемент $[\![\Delta, \nabla]\!]$ удовлетворяет тождеству

$$[\mathrm{L}_\Delta, \mathrm{L}_\nabla] = \mathrm{L}_{[\![\Delta,\nabla]\!]} \tag{4}$$

и это тождество определяет его однозначно.

Подсказка. Для доказательства воспользуйтесь следующим результатом:

З а д а ч а 18. Для всякого $a \in A$ и $\Delta \in \mathrm{D}_*(A)$ справедливы равенства

1) $[\mathrm{i}_\Delta, da] = \mathrm{i}_{\Delta(a)}$,
2) $[\mathrm{L}_\Delta, da] = -\mathrm{L}_{\Delta(a)}$.

О п р е д е л е н и е 5. Элемент $[\![\Delta, \nabla]\!]$, определенный в задаче 16, называется *скобкой Схоутена* элементов Δ и ∇.

З а д а ч а 19. Докажите, что скобка Схоутена обладает следующими свойствами:

1) $[\![\Delta, \nabla]\!] + (-1)^{(\Delta-1)(\nabla-1)}[\![\nabla, \Delta]\!] = 0$,
2) $[\![\Delta, [\![\nabla, \Box]\!]]\!] = [\![[\![\Delta, \nabla]\!], \Box]\!] + (-1)^{(\Delta-1)(\nabla-1)}[\![\nabla, [\![\Delta, \Box]\!]]\!]$,
3) $[\![\Delta, \nabla\wedge\Box]\!] = [\![\Delta, \nabla]\!]\wedge\Box + (-1)^{(\Delta-1)\nabla}\nabla[\![\Delta, \Box]\!]$,
4) $[\mathrm{L}_\Delta, \mathrm{i}_\nabla] = (-1)^{\nabla}[\mathrm{i}_\Delta, \mathrm{L}_\nabla] = \mathrm{i}_{[\![\Delta,\nabla]\!]}$,
5) $[\![\Delta, \nabla]\!] = [\Delta, \nabla]$, если $\Delta, \nabla \in \mathrm{D}_1(A)$.