А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 6

Задача 1. Пусть $\Delta\colon Q \to Q_1$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$. Предположим, что его соответствующий ему гомоморфизм $\varphi^\Delta\colon \mathscr{J}^k(Q) \to Q_1$ является эпиморфизмом. Выберем натуральное число k_1 и определим Q_2 как коядро гомоморфизма $\varphi^\Delta_{k_1}\colon \mathscr{J}^{k+k_1}(Q) \to \mathscr{J}^{k_1}(Q_1)$,

$$0 \to \mathscr{J}^{k+k_1}(Q) \xrightarrow{\varphi^\Delta_{k_1}} \mathscr{J}^{k_1}(Q_1) \to Q_2 \to 0.$$

Обозначим композицию оператора $j_{k_1}: Q_1 \to \mathscr{J}^{k_1}(Q_1)$ и естественной проекции $\mathscr{J}^{k_1}(Q_1) \to Q_2$ через $\Delta_1\colon Q_1 \to Q_2$. Докажите, что $\Delta_1 \circ \Delta = 0$.

Задача 2. Докажите, что Δ_1 является оператором совместности для оператора Δ, т. е. что для любого оператора ∇, такого что $\nabla \circ \Delta = 0$ и $\operatorname{ord} \nabla = k_1$, существует такой оператор $\square$, для которого $\nabla = \square \circ \Delta_1$.

Мы можем применить описанную процедуру к оператору Δ_1 и некоторому натуральному числу k_2 и получить $\Delta_2\colon Q_2 \to Q_3$ и т. д. В результате получим комплекс

$$0 \to Q \xrightarrow{\Delta} Q_1 \xrightarrow{\Delta_1} Q_2 \xrightarrow{\Delta_2} \ldots \to Q_i \xrightarrow{\Delta_i} Q_{i+1} \to \ldots,$$

который называется *комплексом совместности* оператора Δ.

Задача 3. Постройте комплекс совместности для оператора де Рама $d\colon \Lambda^i \to \Lambda^{i+1}$ в категории геометрических модулей. (Возьмите $k_1 = k_2 = \ldots = 1$.)

Задача 4. Постройте комплекс совместности для оператора $j_k\colon P \to \mathscr{J}^k(P)$ в категории геометрических модулей, если $P = C^\infty(\pi)$ — модуль сечений некоторого векторного расслоения π. (Возьмите $k_1 = k_2 = \ldots = 1$.)

Задача 5. Пусть M — (псевдо)риманово многообразие, $\dim M = n$. Рассмотрим оператор $\Delta = d{*}d\colon \Lambda^i \to \Lambda^{n-i}$, где $*$ — оператор Ходжа на модулях дифференциальных форм. Постройте для него комплекс совместности ($k_1 = k_2 = \ldots = 1$).

Задача 6. Рассмотрим отображение $\mathrm{i}_k\colon A \to \mathscr{J}^k(A)$, $\mathrm{i}_k(a) = aj_k(1)$. Положим $\Lambda^{(k)} = \mathscr{J}^k(A)/\operatorname{im}\mathrm{i}_k$ и определим отображение $d^{(k)}\colon A \to \Lambda^{(k)}$ как композицию j_k с естественной проекцией $\mathscr{J}^k(A) \to \Lambda^{(k)}$. Постройте комплексы совместности для оператора $d^{(k)}$ с произвольными k_1, k_2 и т. д. (*высшие комплексы де Рама*).

Далее в этом листке мы будем рассматривать только проективные модули.

Определение 1. Комплекс дифференциальных операторов $\ldots \to P_{i-1} \xrightarrow{\Delta_i} P_i \xrightarrow{\Delta_{i+1}} P_{i+1} \to \ldots$ называется *формально точным*, если комплекс

$$\ldots \to \mathscr{J}^{k_i+k_{i+1}+l}(P_{i-1}) \xrightarrow{\varphi^{\Delta_i}_{k_i+k_{i+1}+l}} \mathscr{J}^{k_{i+1}+l}(P_i) \xrightarrow{\varphi^{\Delta_{i+1}}_{k_{i+1}+l}} \mathscr{J}^l(P_{i+1}) \to \ldots,$$

где $\operatorname{ord}\Delta_j \leqslant k_j$, точен при любом l.

Задача 7. Докажите, что Jet-когомологии Спенсера оператора Δ совпадают с когомологиями любого формально точного комплекса вида

$$0 \to P \xrightarrow{\Delta} P_1 \to P_2 \to P_3 \to \ldots$$

Подсказка. Постройте подходящий бикомплекс.

О п р е д е л е н и е 2. Оператор Δ называется *формально интегрируемым*, если для всех l модули $E^l_\Delta = \ker\varphi^\Delta_l \subset \mathscr{J}^{k+l}(P)$ проективны и естественные отображения $E^l_\Delta \to E^{l-1}_\Delta$ являются сюръекциями.

Далее в этом листке мы будем предполагать, что все рассматриваемые операторы формально интегрируемы.

О п р е д е л е н и е 3. Дифференциальный оператор называется *инволютивным* (в смысле Картана), если его δ-когомологии Спенсера тривиальны.

З а д а ч а 8. Докажите, что если оператор Δ инволютивен, то его комплекс совместности формально точен для всех натуральных k_1, k_2, $k_3, \ldots$.

З а д а ч а 9. Покажите, что высшие когомологии де Рама произвольного многообразия совпадают с его обычными когомологиями де Рама.

З а д а ч а 10. Рассмотрим конструкцию, двойственную задаче 1. Пусть $\Delta\colon Q_1 \to Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$. Предположим, что его соответствующий ему гомоморфизм $\varphi_\Delta\colon Q_1 \to \mathrm{Diff}^+_k(Q)$ является мономорфизмом. Выберем натуральное число k_1 и определим Q_2 как ядро гомоморфизма $\varphi^{k_1}_\Delta\colon \mathrm{Diff}^+_{k_1}(Q_1) \to \mathrm{Diff}^+_{k+k_1}(Q)$,

$$0 \to Q_2 \to \mathrm{Diff}^+_{k_1}(Q_1) \xrightarrow{\psi^{k_1}_\Delta} \mathrm{Diff}^+_{k+k_1}(Q) \to 0.$$

Композицию естественного вложения $Q_2 \to \mathrm{Diff}^+_{k_1}(Q_1)$ и оператора $\mathscr{D}\colon \mathrm{Diff}^+_{k_1}(Q_1) \to Q_1$ обозначим через $\Delta_1\colon Q_2 \to Q_1$.

Сформулируйте и докажите аналоги утверждений из задач 1–9.

Далее мы будем рассматривать категорию геометрических модулей над алгеброй $A = C^\infty(M)$, где M — многообразие размерности n.

З а д а ч а 11. Докажите, что когомологии комплекса

$$0 \to \mathrm{Diff}^+(P, A) \to \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^1) \to \ldots \to \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^n) \to 0, \tag{1}$$

с дифференциалом $\Delta \mapsto d \circ \Delta$ равны $\hat{P} = \mathrm{Hom}_A(P, \Lambda^n)$ в члене $\mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^n)$ и тривиальны в остальных членах.

Любой оператор $\Delta\colon P \to Q$ определяет естественное коцепное отображение

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^+(Q, \Lambda^{i-1}) & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^+(Q, \Lambda^i) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\Delta}} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\Delta}} & & \\
\ldots & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^{i-1}) & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^i) & \longrightarrow & \ldots,
\end{array}$$

где $\tilde{\Delta}(\nabla) = \nabla \circ \Delta \in \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^i)$ при $\nabla \in \mathrm{Diff}^+(Q, \Lambda^i)$.

О п р е д е л е н и е 4. Отображение когомологий $\Delta^*\colon \hat{Q} \to \hat{P}$, индуцированное отображением $\tilde{\Delta}$, называется *сопряженным оператором* к Δ.

З а д а ч а 12. Докажите, что

1) Если $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P, Q)$, то $\Delta^* \in \mathrm{Diff}_k(\hat{Q}, \hat{P})$.
2) $(\Delta_2 \circ \Delta_1)^* = \Delta_1^* \circ \Delta_2^*$.
3) $(\Delta^*)^* = \Delta$.

З а д а ч а 13. Вычислите операторы, сопряженные к операторам де Рама.

З а д а ч а 14. Пусть $X\colon A \to A$ — векторное поле. Найдите X^*.

З а д а ч а 15. Найдите координатное описание для Δ^*.

З а д а ч а 16. Докажите, что для любых $\Delta \in \mathrm{Diff}(P, Q)$, $p \in P$ и $\hat{q} \in \hat{Q}$ форма $\hat{q}(\Delta(p)) - (\Delta(\hat{Q}))(p)$ точна.

З а д а ч а 17. Докажите, что комплекс совместности для некоторого оператора $\Delta\colon P \to Q$ и двойственный комплекс, построенный с помощью задачи 10, для оператора $\Delta^*\colon \hat{Q} \to \hat{P}$, взаимно сопряжены.