А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 7

Определение 1. Элемент $\mathscr{P} \in \mathrm{D}_2(A)$ называется *пуассоновой структурой*, если $[\![\mathscr{P}, \mathscr{P}]\!] = 0$. Пара $(A, \mathscr{P})$ называется *пуассоновой алгеброй*, а операция $(a, b) \mapsto \{a, b\}_{\mathscr{P}} = \mathscr{P}(a, b)$, a, $b \in A$, — скобкой Пуассона, ассоциированной со структурой $\mathscr{P}$.

Задача 1. Докажите, что $\mathscr{P} \in \mathrm{D}_2(A)$ является пуассоновой структурой тогда и только тогда, когда соответствующая скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби.

Задача 2. Пусть $\mathscr{P} \in \mathrm{D}_2(A)$. Определим оператор $\partial_{\mathscr{P}}\colon \mathrm{D}_i(A) \to \mathrm{D}_{i+1}(A)$, полагая $\partial_{\mathscr{P}}(\Delta) = [\![\mathscr{P}, \Delta]\!]$, $\Delta \in \mathrm{D}_i(A)$. Предположим, что алгебра A такова, что в ней можно сокращать на 2, т. е. из $2a = 0$ следует, что $a = 0$, $a \in A$. Докажите, что в этом случае следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mathscr{P}$ — пуассонова структура;
2) $\partial_{\mathscr{P}} \circ \partial_{\mathscr{P}} = 0$;
3) $\partial_{\mathscr{P}}(\partial_{\mathscr{P}}(a)) = 0$ для любого $a \in A$.

Определение 2. Комплекс

$$0 \to A \xrightarrow{\partial_{\mathscr{P}}} \mathrm{D}_1(A) \to \ldots \to \mathrm{D}_i(A) \xrightarrow{\partial_{\mathscr{P}}} \mathrm{D}_{i+1}(A) \to \ldots$$

называется *пуассоновым комплексом* алгебры A, а его когомологии — *пуассоновыми когомологиями* и обозначаются $H^*(A; \mathscr{P}) = \bigoplus_{i \geqslant 0} H^i(A; \mathscr{P})$.

Задача 3. Докажите, что дифференциал $\partial_{\mathscr{P}}$ обладает следующими свойствами:

1) $\partial_{\mathscr{P}}(\Delta \wedge \nabla) = \partial_{\mathscr{P}}(\Delta) \wedge \nabla + (-1)^{\Delta - 1} \Delta \wedge \partial_{\mathscr{P}}(\nabla)$;
2) $\partial_{\mathscr{P}}[\![\Delta, \nabla]\!] = [\![\partial_{\mathscr{P}}(\Delta), \nabla]\!] + (-1)^{\Delta}[\![\Delta, \partial_{\mathscr{P}}(\nabla)]\!]$,

Δ, $\nabla \in \mathrm{D}_*(A)$, и, следовательно, $H^*(A; \mathscr{P})$ наследует структуру градуированной алгебры относительно внешнего умножения и градуированной алгебры Ли относительно скобки Схоутена.

Определение 3. Пусть $(A, \mathscr{P})$ — пуассонова алгебра.

1) Множество
$$Z_{\mathscr{P}}(A) = \{\, a \in A \mid \{a, b\}_{\mathscr{P}} = 0,\ \forall b \in A \,\}$$
называется *пуассоновым центром* алгебры A.
2) Дифференцирование вида $H_a = \{a, \cdot\}$ называется *гамильноновым* с гамильтонианом $a \in A$. Множество гамильтоновых дифференцирований обозначается $\mathrm{Ham}(A; \mathscr{P}) \subset \mathrm{D}_1(A)$.
3) Дифференцирование $X \in \mathrm{D}_1(A)$ называется *каноническим*, если $X\{a, b\} = \{Xa, b\} + \{a, Xb\}$ для всех a, $b \in A$. Множество канонических дифференцирований обозначается $\mathrm{Can}(A; \mathscr{P}) \subset \mathrm{D}_1(A)$.

Задача 4. Пусть $(A, \mathscr{P})$ — пуассонова алгебра. Докажите, что:

1) Ее пуассонов центр является подалгеброй в A.
2) $\mathrm{Can}(A; \mathscr{P})$ является $\Bbbk$-подалгеброй Ли в $\mathrm{D}_1(A)$, а $\mathrm{Ham}(A; \mathscr{P})$ — идеалом в $\mathrm{Can}(A; \mathscr{P})$.

Определение 4. Пусть $\mathscr{P}$ — пуассонова структура в алгебре A. Формальный ряд

$$\mathscr{P}_t = \mathscr{P} + t\mathscr{P}_1 + \ldots + t^i\mathscr{P}_i + \ldots$$

$\mathscr{P}_i \in \mathrm{D}_2(A)$, называется *формальной деформацией* структуры $\mathscr{P}$, если $[\![\mathscr{P}_t, \mathscr{P}_t]\!] = 0$. Элемент $\mathscr{P}_1$ называется *инфинитезимальной деформацией*. Инфинитезимальная деформация называется *тривиальной*, если она имеет вид $\mathscr{P}_1 = [\![\mathscr{P}, X]\!]$ для некоторого $X \in \mathrm{D}_1(A)$.

Задача 5. Пусть $(A, \mathscr{P})$ — пуассонова алгебра. Докажите, что:

1) $H^0(A; \mathscr{P}) = Z_{\mathscr{P}}(A)$;
2) $H^1(A; \mathscr{P}) = \mathrm{Can}(A; \mathscr{P}) \big/ \mathrm{Ham}(A; \mathscr{P})$;
3) $H^2(A; \mathscr{P})$ совпадает с множеством классов эквивалентности инфинитезимальных деформаций по модулю тривиальных;
4) если $H^3(A; \mathscr{P}) = 0$, то всякая инфинитезимальная деформация может быть продолжена до формальной.

Задача 6. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{U}_{\mathfrak{g}}$ — ее универсальная обертывающая. Обозначим через $S_{\mathfrak{g}}$ соответствующую градуированную алгебру.

1) Покажите, что $S_{\mathfrak{g}}$ обладает естественной пуассоновой структурой. Обозначим ее через $\mathscr{P}_{\mathfrak{g}}$.
2) Опишите пуассонов центр алгебры $S_{\mathfrak{g}}$.
3) Докажите, что если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, то $H^1(S_{\mathfrak{g}}; \mathscr{P}_{\mathfrak{g}}) = 0$.
4) Опишите когомологии $H^i(S_{\mathfrak{g}}; \mathscr{P}_{\mathfrak{g}})$ в терминах когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Задача 7. Поскольку отображение $\partial_{\mathscr{P}}\colon A \to \mathrm{D}_1(A)$ — дифференцирование, имеет место гомоморфизм $\varphi^1_{\mathscr{P}}\colon \Lambda^1(A) \to \mathrm{D}_1(A)$. Положим $\varphi^0_{\mathscr{P}} = \mathrm{id}_A\colon A \to A$, а для $i > 1$ определим $\varphi^i_{\mathscr{P}}\colon \Lambda^i(A) \to \mathrm{D}_i(A)$ по индукции, полагая

$$\varphi^i_{\mathscr{P}}(\omega \wedge \theta) = \varphi^\alpha_{\mathscr{P}}(\omega) \wedge \varphi^\beta_{\mathscr{P}}(\theta), \qquad \omega \in \Lambda^\alpha(A), \theta \in \Lambda^\beta(A), \quad \alpha, \beta < i.$$

Докажите, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \Lambda^i(A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^i_{\mathscr{P}}"'] & \Lambda^{i+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{i+1}_{\mathscr{P}}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{D}_i(A) \arrow[r, "\partial_{\mathscr{P}}"] & \mathrm{D}_{i+1}(A) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

коммутативна и, таким образом, $\varphi^*_{\mathscr{P}}$ индуцирует гомоморфизм $H^*(A) \to H^*(A; \mathscr{P})$, где $H^*(A)$ — когомологии де Рама.

Задача 8. Пуассонова структура $\mathscr{P}$ называется *невырожденной*, если все отображения $\varphi^i_{\mathscr{P}}$ являются изоморфизмами.

1) Докажите, что если A — гладкая алгебра, то структура $\mathscr{P}$ является невырожденной тогда и только тогда, когда $\varphi^1_{\mathscr{P}}$ — изоморфизм.
2) Со всякой невырожденной структурой $\mathscr{P}$ можно связать 2-форму Ω, определяемую равенством $\varphi^2_{\mathscr{P}}(\Omega) = \mathscr{P}$. Пусть $\mathscr{P}$ — пуассонова структура на $\mathrm{Smbl}\, A$, определенная в Листке 1. Докажите, что если $A = C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на многообразии M, то соответствующая форма совпадает с канонической формой $dp \wedge dq$ на T^*M.

Задача 9. Докажите, что для невырожденной структуры $\mathscr{P}$ скобка, индуцированная в $H^*(A; \mathscr{P})$ скобкой Схоутена (см. задачу 3), тривиальна. Покажите, что требование невырожденности существенно.

Определение 5. Две пуассоновы структуры $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ называются *совместными* (или *коммутирующими*), если $[\![\mathscr{P}, \mathscr{P}']\!] = 0$.

Задача 10. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ — коммутирующие структуры;
2) $\lambda\mathscr{P} + \mu\mathscr{P}'$ — пуассонова структура для всех λ, $\mu \in \Bbbk$;
3) $[\partial_{\mathscr{P}}, \partial_{\mathscr{P}'}] = 0$;
4) $\partial_{\mathscr{P}}(\partial_{\mathscr{P}'}(a)) = -\partial_{\mathscr{P}'}(\partial_{\mathscr{P}}(a))$ для любого элемента $a \in A$.

Задача 11. Пусть V — $\Bbbk$-модуль, наделенный двумя структурами алгебры Ли, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$. Тогда в симметрической алгебре $S(V)$ возникают две пуассоновы структуры (см. задачу 6). Выпишите условия коммутирования этих структур в терминах алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$.

Задача 12 (теорема Магри). Пусть $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ — коммутирующие пуассоновы структуры, причем $H^1(A; \mathscr{P}') = 0$. Предположим, что существуют такие элементы a_1, $a_2 \in A$, что $\mathscr{P}(a_1) = \mathscr{P}'(a_2)$. Докажите, что в этом случае существуют такие элементы a_s, $s \geqslant 3$, что

1) $\mathscr{P}(a_s) = \mathscr{P}'(a_{s+1})$, $s \geqslant 1$;
2) все пары элементов a_s, a_t находятся в *инволюции* относительно обеих структур, то есть $\{a_s, a_t\}_{\mathscr{P}} = \{a_s, a_t\}_{\mathscr{P}'} = 0$ для всех s, $t \geqslant 1$.