А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 8

Пусть P — A-модуль. Положим
$$\operatorname{Der}(P) = \{\, X \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(P,P) \mid \exists X' \in \mathrm{D}_1(A) : X(ap) = X'(a)p + aX(p),\ \forall a \in A,\ p \in P \,\}.$$

З а д а ч а 1. Докажите, что $\operatorname{Der}(P)$ является подмодулем в $\operatorname{Diff}_1(P,P)$ и образует алгебру Ли относительно коммутатора. Опишите $\operatorname{Der}(P)$ в случае, когда $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и P — свободный A-модуль.

Пусть $\pi\colon \operatorname{Der}(P) \to \mathrm{D}_1(A)$ сопоставляет элементу $X \in \operatorname{Der}(P)$ соответствующее дифференцирование $X' \in \mathrm{D}_1(A)$.

З а д а ч а 2. Докажите, что
$$0 \to \operatorname{Hom}_A(P,P) \to \operatorname{Der}(P) \xrightarrow{\pi} \mathrm{D}_1(A) \tag{1}$$
есть точная последовательность A-модулей и $\Bbbk$-алгебр Ли. Приведите пример, когда π не является эпиморфизмом.

О п р е д е л е н и е 1. Гомоморфизм A-модулей $\nabla\colon \mathrm{D}_1(A) \to \operatorname{Der}(P)$ называется *связностью* в модуле P, если он расщепляет последовательность (1). Иными словами, ∇ — связность, если

1) $\nabla_{aX+bY} = a\nabla_X + b\nabla_Y$,
2) $\nabla_X(ap) = X(a)p + a\nabla_X(p)$

для всех a, $b \in A$, X, $Y \in \mathrm{D}_1(A)$ и $p \in P$.

Отображение $R_\nabla\colon \mathrm{D}_1(A) \times \mathrm{D}_1(A) \to \operatorname{Der}(P)$, определенное равенством $R_\nabla(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$, называется *кривизной* связности ∇. Связность называется *плоской*, если она является гомоморфизмом алгебр Ли, т. е. если $R_\nabla = 0$.

Продолжим отображение R_∇ до отображений
$$R_\nabla\colon \mathrm{D}_i(A) \times \mathrm{D}_{i'}(A) \times \mathrm{D}_j(P) \to \mathrm{D}_{i+i'+j-2}(P),$$
полагая при $i + i' + j = 2$
$$R_\nabla(\Delta, \Delta', \Box) = \begin{cases} ([\nabla_\Delta, \nabla_{\Delta'}] - \nabla_{[\Delta,\Delta']})(\Box), & \text{если } i = i' = 1,\ j = 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$
и
$$R_\nabla(\Delta, \Delta', \Box)(a) = R_\nabla(\Delta, \Delta', \Box(a)) + (-1)^{\Box} R_\nabla(\Delta, \Delta'(a), \Box) + (-1)^{\Delta'+\Box} R_\nabla(\Delta(a), \Delta', \Box),$$
если $i + i' + j > 2$.

З а д а ч а 3. Докажите, что отображения R_∇ определены корректно и обладают следующими свойствами:

1) $R_\nabla(\Delta, \Delta', \Box) = (-1)^{(\Delta-1)(\Delta'-1)} R_\nabla(\Delta', \Delta, \Box)$;
2) $R_\nabla(X \wedge \Delta, \Delta', \Box) = X \wedge R_\nabla(\Delta, \Delta', \Box)$;
3) $R_\nabla(\Delta, X \wedge \Delta', \Box) = (-1)^{X(\Delta-1)} X \wedge R_\nabla(\Delta, \Delta', \Box)$;
4) $R_\nabla(\Delta, \Delta', X \wedge \Box) = (-1)^{X(\Delta+\Delta')} X \wedge R_\nabla(\Delta, \Delta', \Box)$.

Определим *скобку Схоутена*

$$[\![\cdot\,,\cdot]\!]_\nabla\colon\ \mathrm{D}_i(A)\times\mathrm{D}_j(P)\to\mathrm{D}_{i+j-1}(P),$$

полагая при $i+j=1$

$$[\![\Delta,\square]\!]_\nabla=\begin{cases}-\square(\Delta), & \text{если } i=0,\ j=1,\\ \nabla_\Delta(\square), & \text{если } i=1,\ j=0,\end{cases}$$

и

$$[\![\Delta,\square]\!]_\nabla(a)=[\![\Delta,\square(a)]\!]_\nabla+(-1)^{\square-1}[\![\Delta(a),\square]\!]_\nabla$$

при $i+j>1$.

Задача 4. Докажите, что скобка $[\![\Delta,\square]\!]_\nabla$ определена корректно и обладает следующими свойствами:

1) $[\![\Delta,X\wedge\square]\!]_\nabla=[\![\Delta,X]\!]\wedge\square+(-1)^{(\Delta-1)X}X\wedge[\![\Delta,\square]\!]_\nabla$,
2) $[\![X\wedge\Delta,\square]\!]_\nabla=X\wedge[\![\Delta,\square]\!]_\nabla+(-1)^{X\Delta}\Delta\wedge[\![X,\square]\!]_\nabla$,
3) $[\![\Delta,[\![\Delta',\square]\!]_\nabla]\!]_\nabla-(-1)^{(\Delta-1)(\Delta'-1)}[\![\Delta',[\![\Delta,\square]\!]_\nabla]\!]_\nabla=[\![[\![\Delta,\Delta']\!],\square]\!]_\nabla+R_\nabla(\Delta,\Delta',\square)$.

Задача 5. Докажите, что для любых Δ, Δ', X, $X'\in\mathrm{D}_*(A)$ выполнены тождества

$$\begin{multline}(-1)^{(X-1)(\Delta'-1)}\big([\nabla_X,R_\nabla(\Delta,\Delta')]+R_\nabla(X,[\![\Delta,\Delta']\!])\big)+(-1)^{(\Delta-1)(X-1)}\big([\nabla_\Delta,R_\nabla(\Delta',X)]+\\+R_\nabla(\Delta,[\![\Delta',X]\!])\big)+(-1)^{(\Delta'-1)(\Delta-1)}\big([\nabla_{\Delta'},R_\nabla(X,\Delta)]+R_\nabla(\Delta',[\![X,\Delta]\!])\big)=0\end{multline}$$

и

$$\begin{multline}[R_\nabla(X,X'),R_\nabla(\Delta,\Delta')]=R_\nabla([\![X,X']\!],[\![\Delta,\Delta']\!])-\\-R_\nabla(X,[\![X',[\![\Delta,\Delta']\!]]\!])+(-1)^{(X-1)(X'-1)}R_\nabla(X',[\![X,[\![\Delta,\Delta']\!]]\!])-\\-[\nabla_X,R_\nabla(X',[\![\Delta,\Delta']\!])]+(-1)^{(X-1)(X'-1)}[\nabla_{X'},R_\nabla(X,[\![\Delta,\Delta']\!])]-\\-(-1)^{(\Delta-1)(\Delta'-1)}[R_\nabla([\![X,X']\!],\Delta),\nabla_{\Delta'}]+[R_\nabla([\![X,X']\!],\Delta'),\nabla_\Delta]+\\+[R_\nabla(X,[\![X',\Delta]\!]),\nabla_{\Delta'}]-(-1)^{(X-1)(X'-1)}[R_\nabla(X',[\![X,\Delta]\!]),\nabla_{\Delta'}]-\\-(-1)^{(\Delta-1)(\Delta'-1)}\Big([R_\nabla(X,[\![X',\Delta']\!]),\nabla_\Delta]-\\-(-1)^{(X-1)(X'-1)}[R_\nabla(X',[\![X,\Delta']\!]),\nabla_\Delta]\Big)+\\+[[\nabla_X,R_\nabla(X',\Delta)],\nabla_{\Delta'}]-(-1)^{(X-1)(X'-1)}[[\nabla_{X'},R_\nabla(X,\Delta)],\nabla_{\Delta'}]-\\-(-1)^{(\Delta-1)(\Delta'-1)}\Big([\nabla_\Delta,[\nabla_X,R_\nabla(X',\Delta')]]-\\-(-1)^{(X-1)(X'-1)}[\nabla_\Delta,[\nabla_{X'}R_\nabla(X,\Delta')\Big).\end{multline}$$

Задача 6. Пусть $\Delta\in\mathrm{D}_i(A)$, $\square\in\mathrm{D}_j(P)$ и ∇ — связность в модуле P. Докажите, что для любых элементов $a_1,\ldots,a_{i+j-1}\in A$ выполнено равенство

$$\begin{multline}[\![\Delta,\square]\!]_\nabla(a_1,\ldots,a_{i+j-1})=(-1)^{\frac{(i-1)(2j+i-2)}{2}}\sum_{\sigma\in S_{i-1}}(-1)^{\epsilon_\sigma}\nabla_{\Delta(a_\sigma)}(\square(a_{\bar\sigma}))-\\-(-1)^{\frac{i(2j+i-1)}{2}}\sum_{\sigma\in S_{j-1}}(-1)^{\epsilon_{\bar\sigma}}\square(a_\sigma,\Delta(\bar\sigma)),\end{multline}$$

где S_k — множество последовательностей $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant i+j-1$, $\bar{\sigma}$ обозначает дополнительную к σ возрастающую последовательность, а $\epsilon(\sigma) = i_1 + \ldots + i_k$ и $X(a_\sigma) = X(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$. В частности,

$$[\![\Delta, \Box]\!](a_1, \ldots, a_{i+j-1}) = (-1)^{\frac{(i-1)(2j+i-2)}{2}} \sum_{\sigma \in S_{i-1}} (-1)^{\epsilon_\sigma} \Delta(a_\sigma, \Box(a_{\bar{\sigma}})) - \\ - (-1)^{\frac{i(2j+i-1)}{2}} \sum_{\sigma \in S_{j-1}} (-1)^{\epsilon_\sigma} \Box(a_\sigma, \Delta(\bar{\sigma})).$$

З а д а ч а 7. Пусть $\mathcal{P} \in \mathrm{D}_2(A)$ — пуассонова структура. Связность ∇ называется *пуассоновой* относительно структуры $\mathcal{P}$, если $R_\nabla(\mathcal{P}(a), \mathcal{P}(b)) = 0$ для любых a, $b \in A$.

1) Докажите, что если ∇ — пуассонова связность, то последовательность

$$0 \to P \xrightarrow{\partial_{\mathcal{P}}^{\nabla}} \mathrm{D}_1(P) \to \ldots \to \mathrm{D}_i(P) \xrightarrow{\partial_{\mathcal{P}}^{\nabla}} \mathrm{D}_{i+1}(P) \to \ldots$$

где $\partial_{\mathcal{P}}^{\nabla} = [\![\mathcal{P}, \cdot]\!]_\nabla$, является комплексом. Опишите свойства дифференциала $\partial_{\mathcal{P}}^{\nabla}$.

2) Докажите, что если $\Delta \in \mathrm{D}_i(P)$, то

$$(\partial_{\mathcal{P}}^{\nabla}\Delta)(a_1, \ldots, a_{i+1}) = \sum_\alpha (-1)^\alpha \nabla_{\mathcal{P}(a_\alpha)} \Delta(a_1, \ldots, \hat{a}_\alpha, \ldots, a_{i+1}) - \\ - \sum_{\alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta} \Delta(\mathcal{P}(a_\alpha, a_\beta), a_1, \ldots, \hat{a}_\alpha, \ldots, \hat{a}_\beta, \ldots, a_{i+1})$$

для любых $a_1, \ldots, a_{i+1} \in A$, где «домик» означает, что соответствующий аргумент пропущен. В частности,

$$(\partial_{\mathcal{P}}\Delta)(a_1, \ldots, a_{i+1}) = \sum_\alpha (-1)^\alpha \mathcal{P}(a_\alpha, \Delta(a_1, \ldots, \hat{a}_\alpha, \ldots, a_{i+1})) - \\ - \sum_{\alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta} \Delta(\mathcal{P}(a_\alpha, a_\beta), a_1, \ldots, \hat{a}_\alpha, \ldots, \hat{a}_\beta, \ldots, a_{i+1}).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть задан комплекс

$$0 \to K_0 \xrightarrow{\partial} K_1 \to \ldots \to K_i \xrightarrow{\partial} K_{i+1} \to \ldots$$

и скобка $[\cdot\,,\cdot] \colon K_i \otimes_{\Bbbk} K_j \to K_{i+j}$, превращающая $K = \bigoplus_{i \geqslant 0} K_i$ в градуированную $\Bbbk$-алгебру Ли. Если ∂ является градуированным дифференцированием степени 1,

$$\partial[k_i, k_j] = [\partial(k_i), k_j] + (-1)^i [k_i, \partial(k_j)],$$

то K называется *дифференциальной градуированной алгеброй Ли*.

З а д а ч а 8 (машина по производству скобок). Пусть $K = \bigoplus_{i \geqslant 0} K_i$ — дифференциальная градуированная алгебра Ли. Рассмотрим градуированный $\Bbbk$-модуль $K' = K\big/\operatorname{im}\partial$, $K'_i = K_{i+1}\big/(\operatorname{im}\partial \cap K_{i+1})$. Определим скобку $[\![\cdot\,,\cdot]\!] \colon K'_i \times K'_j \to K'_{i+j}$ равенством

$$[\![\alpha, \beta]\!] = [\partial\alpha, \beta], \tag{2}$$

где α, $\beta \in K'$, $[\cdot\,,\cdot]$ — скобка в K. Докажите, что

1) K' — градуированная алгебра Ли;

2) $\partial[\![\alpha, \beta]\!] = [\partial\alpha, \partial\beta]$.

Убедитесь, что скобка Схоутена является частным случаем приведенной конструкции.

Подсказка. Для построения скобки Схоутена рассмотрите в качестве K множество эндоморфизмов комплекса де Рама.

З а д а ч а 9. Определим *подстановку* формы $\omega \in \Lambda^k(A)$ в полидифференцирование $\Delta \in \mathrm{D}_i(A)$,

$$\mathrm{i}\colon \Lambda^k(A) \times \mathrm{D}_i(A) \to \mathrm{D}_{i-k}(A),$$

полагая

$$\mathrm{i}_\omega \Delta = \begin{cases} 0, & \text{если } i < k, \\ (-1)^i \langle \Delta, \omega \rangle, & \text{если } i = k, \end{cases}$$

где $\langle \Delta, \omega \rangle$ — естественное спаривание, а при $i > k$ —

$$(\mathrm{i}_\omega \Delta)(a) = \mathrm{i}_\omega(\Delta(a)), \quad a \in A.$$

1) Опишите и докажите свойства введенной операции подстановки.
2) Докажите, что

$$\mathrm{i}_\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_i) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{S_k} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \omega(X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_k}) X_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge X_{\beta_{i-k}},$$

где сумма берется по всем подпоследовательностям σ вида $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leqslant i$, $\epsilon(\sigma) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_{i-k}$ — дополнительная к σ возрастающая последовательность и $\omega(X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_k}) = \mathrm{i}_\omega(X_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_{\alpha_k})$, $X_1, \ldots, X_i \in \mathrm{D}_1(A)$.

З а д а ч а 10. Докажите, что если $\mathcal{P}$ — невырожденная пуассонова структура и $\Omega \in \Lambda^2(A)$ — соответствующая 2-форма (см. Листок 7), то выполняется равенство

$$[\![X, Y]\!] = (-1)^{X+Y} [\partial_\mathcal{P}, \mathrm{i}_\Omega](X \wedge Y) + (-1)^X [\partial_\mathcal{P}, \mathrm{i}_\Omega](X) \wedge Y + (-1)^Y X \wedge [\partial_\mathcal{P}, \mathrm{i}_\Omega](Y),$$

где X, $Y \in \mathrm{D}_*(A)$.

З а д а ч а 11 (пуассоновы гомологии). Пусть $\mathcal{P} \in \mathrm{D}_2(A)$ — пуассонова структура. Положим $d_\mathcal{P} = [d, \mathrm{i}_\mathcal{P}]\colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i-1}(A)$.

1) Докажите, что последовательность

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{d_\mathcal{P}} \Lambda^1(A) \leftarrow \ldots \leftarrow \Lambda^{i-1}(A) \xleftarrow{d_\mathcal{P}} \Lambda^i(A) \leftarrow \ldots \tag{3}$$

является комплексом. Его гомологии называются *пуассоновыми гомологиями* алгебры A.
2) Опишите свойства дифференциала $d_\mathcal{P}$.
3) Попробуйте установить связь между пуассоновыми гомологиями и когомологиями.
4) Пусть в задаче 8 K — это комплекс эндоморфизмов комплекса (3) и элементы $\mathrm{D}_*(A)$ вкладываются в K как подстановки. Опишите соответствующую скобку $\mathrm{D}_*(A)$.

З а д а ч а 12. Пусть в задаче 8 K — это комплекс эндоморфизмов комплекса $(\mathrm{D}_*(A), \partial_\mathcal{P})$ и элемены $\Lambda^*(A)$ вкладываются в K как подстановки.

1) Опишите соответствующую скобку. Покажите, что ее можно понимать как скобку

$$\{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{P}\colon \Lambda^i(A) \times \Lambda^j(A) \to \Lambda^{i+j-1}(A).$$

2) Докажите тождества

$$\{a, db\}_\mathcal{P} = -\mathcal{P}(a, b), \qquad \{da, db\}_\mathcal{P} = d\mathcal{P}(a, b), \quad a, b \in A.$$

3) Опишите «взаимодействие» этой скобки с дифференциалами d и $d_\mathcal{P}$.

З а д а ч а 13. Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathrm{D}_*(A)$ как градуированную коммутативную алгебру относительно внешнего умножения. Тогда над ней можно построить градуированное дифференциальное исчисление (см. Листок 5). Докажите, что дифференциал де Рама $d\colon \Lambda^* \to \Lambda^*$ является оператором второго порядка (умножение на поливекторы задается подстановкой) и его символ — скобка Схоутена.