А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

Листок 9

Задача 1. Рассмотрим модуль $\mathrm{D}_1(\Lambda^*)$ дифференцирований алгебры A со значениями в A-формах. Если $X \in \mathrm{D}_1(\Lambda^*)$ и $\operatorname{im} X \subset \Lambda^k$, мы полагаем $\deg X = k$. Определим умножение

$$\wedge\colon \Lambda^j \times \mathrm{D}_1(\Lambda^k) \to \mathrm{D}(\Lambda^{j+k}),$$

формулой $(\omega \wedge X)(a) = \omega \wedge X(a)$, $\omega \in \Lambda^j$, $X \in \mathrm{D}(\Lambda^k)$, $a \in A$. Докажите что это определение корректно и задает в $\mathrm{D}_1(\Lambda^*)$ структуру градуированного Λ^*-модуля.

Задача 2. Определим операцию подстановки

$$\mathrm{i}\colon\ \mathrm{D}_1(\Lambda^j) \times \Lambda^k \to \Lambda^{j+k-1},$$

полагая $\mathrm{i}_X\omega = 0$, если $k = 0$, и далее по индукции

$$\mathrm{i}_X(da \wedge \omega) = X(a) \wedge \omega - (-1)^X da \wedge \mathrm{i}_X\omega, \quad a \in A.$$

Определим также подстановку $\mathrm{i}\colon\ \mathrm{D}_1(\Lambda^j) \times \mathrm{D}_1(\Lambda^k) \to \mathrm{D}_1(\Lambda^{j+k-1})$, полагая $(\mathrm{i}_X Y)(a) = \mathrm{i}_X(Y(a))$, $X \in \mathrm{D}_1(\Lambda^j)$, $Y \in \mathrm{D}_1(\Lambda^k)$.

1) Докажите что эти определения корректны и обладают следующими свойствами:
2) $\mathrm{i}_{\omega\wedge X} = \omega \wedge \mathrm{i}_X$,
3) $[\mathrm{i}_X, \omega\wedge] = (\mathrm{i}_X\omega)\wedge$.

Задача 3. Очевидно, имеет место вложение $\Lambda^* \otimes \mathrm{D}_1(A) \to \mathrm{D}_1(\Lambda^*)$, определяемое равенством $(\omega \otimes X)(a) = \omega X(a)$, $X \in \mathrm{D}_1(A)$. Докажите, что на образе этого вложения выполняются равенства

1) $\theta \wedge (\omega \otimes X) = (\theta \wedge \omega) \otimes X$,
2) $\mathrm{i}_{\omega\otimes X}\theta = \omega \wedge \mathrm{i}_X\theta$,
3) $\mathrm{i}_{\omega\otimes X}(\theta \otimes Y) = (\omega \wedge \mathrm{i}_X\theta) \otimes Y$.

Задача 4. Пусть X, $Y \in \mathrm{D}_1(\Lambda^*)$. Докажите, что $[\mathrm{i}_X, \mathrm{i}_Y] = \mathrm{i}_{[\![X,Y]\!]^{rn}}$, где элемент $[\![X,Y]\!]^{rn}$ имеет вид

$$[\![X,Y]\!]^{rn} = \mathrm{i}_X Y - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y X$$

и называется *скобкой Ричардсона–Нийенхейса* элементов X и Y. Докажите, что скобка Ричардсона–Нийенхейса обладает следующими свойствами

1) $[\![X,Y]\!]^{rn} + (-1)^{(X-1)(Y-1)}[\![Y,X]\!]^{rn} = 0$,
2) $(-1)^{(Y+1)(X+Z)}[\![[\![X,Y]\!]^{rn},Z]\!]^{rn} + (-1)^{(Z+1)(Y+X)}[\![[\![Y,Z]\!]^{rn},X]\!]^{rn} +$
$+ (-1)^{(X+1)(Z+Y)}[\![[\![Z,X]\!]^{rn},Y]\!]^{rn} = 0$,
3) $[\![X,\omega\wedge Y]\!]^{rn} = \mathrm{i}_X(\omega) \wedge Y + (-1)^{(X-1)\omega}\omega \wedge [\![X,Y]\!]^{rn}$.

Задача 5. Определим производную Ли $\mathrm{L}\colon\ \mathrm{D}_1(\Lambda^j) \times \Lambda^k \to \Lambda^{j+k}$ формы $\omega \in \Lambda^k$ вдоль дифференцирования $X \in \mathrm{D}_1(\Lambda^j)$, полагая

$$\mathrm{L}_X\omega = [d, \mathrm{i}_X]\omega = (d \circ \mathrm{i}_X + (-1)^X \mathrm{i}_X \circ d)\omega.$$

Докажите, что производная Ли обладает следующими свойствами:

1) $\mathrm{L}_X(\omega \wedge \theta) = \mathrm{L}_X(\omega) \wedge \theta + (-1)^{X\omega}\omega \wedge L_X(\theta)$,
2) $\mathrm{L}_{\omega\wedge X} = \omega \wedge \mathrm{L}_X + (-1)^{\omega+X} d\omega \wedge \mathrm{L}_X$,
3) $[\mathrm{L}, d] = 0$.

З а д а ч а 6. Пусть $X, Y \in \mathrm{D}_1(\Lambda^*)$. Докажите, что существует элемент $[\![X,Y]\!] \in \mathrm{D}_1(\Lambda^*)$, обладающий свойством $[\mathrm{L}_X, \mathrm{L}_Y] = \mathrm{L}_{[\![X,Y]\!]}$, и этот элемент определен единственным образом.

Подсказка. $[\![X,Y]\!](a) = \mathrm{L}_X(Y(a)) - (-1)^{XY}\mathrm{L}_Y(X(a))$.

О п р е д е л е н и е 1. Определенная выше операция

$$[\![\cdot\,,\cdot]\!] \colon \mathrm{D}_1(\Lambda^j) \times \mathrm{D}_1(\Lambda^k) \to \mathrm{D}_1(\Lambda^{j+k})$$

называется *скобкой Фрёлихера–Нийенхейса.*

З а д а ч а 7. Пусть $X = \omega \otimes X'$, $Y = \theta \otimes Y'$, X, $Y \in \mathrm{D}_1(A)$, ω, $\theta \in \Lambda^*$, — разложимые элементы (см. задачу 3). Докажите, что в этом случае скобка Фрёлихера–Нийенхейса имеет вид

$$[\![X,Y]\!] = \omega \wedge \theta \otimes [X',Y'] + \omega \wedge \mathrm{L}_{X'}\theta \otimes Y' + (-1)^{\omega} d\omega \wedge \mathrm{i}_{X'} \otimes \theta Y' - (-1)^{\omega\theta}\theta \wedge \mathrm{L}_{Y'}\omega \otimes X' -$$
$$- (-1)^{(\omega+1)\theta} d\theta \wedge \mathrm{i}_{Y'}\omega \otimes X' = \omega \wedge \theta \otimes [X',Y'] + \mathrm{L}_X\theta \otimes Y' - (-1)^{\omega\theta}\mathrm{L}_Y\omega \otimes X'.$$

З а д а ч а 8. Докажите, что скобка Фрёлихера–Нийенхейса обладает следующими свойствами:

1) $[\![X,Y]\!] + (-1)^{XY}[\![Y,X]\!] = 0$,
2) $(-1)^{Y(X+Z)}[\![X,[\![Y,Z]\!]]\!] + (-1)^{Z(Y+X)}[\![Y,[\![Z,X]\!]]\!] + (-1)^{X(Z+Y)}[\![Z,[\![X,Y]\!]]\!] = 0$,
3) $\mathrm{i}_{[\![X,Y]\!]} = [\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y] + (-1)^{X(Y+1)}\mathrm{L}_{\mathrm{i}_Y X}$,
4) $\mathrm{i}_Z[\![X,Y]\!] = [\![\mathrm{i}_Z X, Y]\!] + (-1)^{X(Z+1)}[\![X, \mathrm{i}_Z Y]\!] + (-1)^X \mathrm{i}_{[\![Z,X]\!]}Y - (-1)^{(X+1)Y}\mathrm{i}_{[\![Z,Y]\!]}X$,
5) $[\![X, \omega \wedge Y]\!] = \mathrm{L}_X\omega \wedge Y - (-1)^{(X+1)(Y+\omega)} d\omega \wedge \mathrm{i}_Y X + (-1)^{X\omega}\omega \wedge [\![X,Y]\!]$.

З а д а ч а 9. Назовем элемент $U \in \mathrm{D}_1(\Lambda^1)$ интегрируемым, если $[\![U,U]\!] = 0$ и определим отображение $\partial_U \colon \mathrm{D}_1(\Lambda^i) \to \mathrm{D}_1(\Lambda^{i+1})$, полагая $\partial_U(X) = [\![U,X]\!]$, $X \in \mathrm{D}_1(\Lambda^i)$.

1) Докажите, что ∂_U является дифференциальным оператором первого порядка и, если U — интегрируемый элемент, то последовательность

$$0 \to \mathrm{D}_1(A) \xrightarrow{\partial_U} \mathrm{D}_1(\Lambda^1) \to \ldots \to \mathrm{D}_1(\Lambda^i) \xrightarrow{\partial_U} \mathrm{D}_1(\Lambda^{i+1}) \to \ldots$$

является комплексом. Докажите следующие свойства дифференциала ∂_U:

2) $\partial_U[\![X,Y]\!] = [\![\partial_U X, Y]\!] + (-1)^Y[\![X, \partial_U Y]\!]$,
3) $\partial_U(\omega \wedge X) = \mathrm{L}_U(\omega) \wedge X - d\omega \wedge \mathrm{i}_U X + (-1)^{\omega}\omega \wedge \partial_U X$.

О п р е д е л е н и е 2. Рассмотрим $\Bbbk$-алгебры A и B и гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi \colon A \to B$ (то есть введем в B структуру A-алгебры). Тогда всякий B-модуль P является также и A-модулем. Поэтому можно рассмотреть B-модули $\mathrm{D}_1(P)$ и $\mathrm{D}_1(A,P)$ дифференцирований из B в P и из A в P соответственно. Пусть ∇ — естественное преобразование функторов $\mathrm{D}_1(A,\cdot)$ и $\mathrm{D}_1(\cdot)$, то есть такое семейство B-гомоморфизмов $\nabla^P \colon \mathrm{D}_1(A,P) \to \mathrm{D}_1(P)$, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{D}_1(A,P) & \xrightarrow{\nabla^P} & \mathrm{D}_1(P) \\
{\scriptstyle \mathrm{D}_1(A,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}_1(f)} \\
\mathrm{D}_1(A,Q) & \xrightarrow{\nabla^Q} & \mathrm{D}_1(Q)
\end{array}$$

коммутативны для всех $f \in \mathrm{Hom}_B(P,Q)$. Это преобразование называется *связностью* в тройке (A,B,φ), если $\nabla^P(X)\big|_A = X$ для любого дифференцирования $X \in \mathrm{D}_1(A,P)$, где по определению $Y\big|_A = Y \circ \varphi$.

З а д а ч а 10. Исследуйте связь между этим определением и определением связности в Листке 8.

Определение 3. Пусть ∇ — связность в тройке (A, B, φ).

1) Рассмотрим первый дифференциал де Рама $d\colon B \to \Lambda^1(B)$ алгебры B. Поскольку d — $\Lambda^1(B)$-значное дифференцирование, определен элемент
$$U_\nabla = \nabla(d|_A) - d \in \mathrm{D}_1(\Lambda^1(B)),$$
который называется *формой связности*.
2) Отображение $R_\nabla\colon\ \mathrm{D}_1(A,B) \times \mathrm{D}_1(A,B) \to \mathrm{D}_1(B)$, определенное равенством[1]
$$R_\nabla(X,Y) = [\nabla(X), \nabla(Y)] - \nabla(\nabla(X)\circ Y - \nabla(Y)\circ X),$$
где X, $Y \in \mathrm{D}_1(A,B)$, называется *кривизной* связности ∇.
3) Связность называется *плоской*, если $R_\nabla = 0$.

Задача 11. Докажите, что для любых X, $Y \in \mathrm{D}_1(B)$ выполняются равенства
$$\mathrm{i}_X U_\nabla = X - \nabla(X|_A) \quad \text{и} \quad \mathrm{i}_Y(\mathrm{i}_X([\![U_\nabla, U_\nabla]\!])) = 2R_\nabla(X|_A, Y|_A).$$

В оставшихся задачах этого Листка ∇ — плоская связность.

Задача 12. Из задач 9 и 11 следует, что со всякой плоской связностью ассоциируется комплекс $(\mathrm{D}_1(\Lambda^*(B)), \partial_{U_\nabla})$. Назовем элемент $X \in \mathrm{D}_1(P)$ вертикальным, если $X|_A = 0$. Обозначим множество вертикальных элементов через $\mathrm{D}^v(P)$. Докажите следующие утверждения:

1) $X \in \mathrm{D}_1(\Lambda^*(B))$ вертикально тогда и только тогда, когда $\mathrm{i}_X U_\nabla = X$.
2) Форма связности U_∇ лежит в $\mathrm{D}^v(\Lambda^1(B))$.
3) Дифференциал ∂_{U_∇} сохраняет вертикальность, то есть $\partial_{U_\nabla}\,\mathrm{D}^v(\Lambda^i(B)) \subset \mathrm{D}^v(\Lambda^{i+1}(B))$.

Определение 4. Обозначим через ∂_∇ ограничение ∂_{U_∇} на подмодуль вертикальных дифференцирований. Комплекс
$$0 \to \mathrm{D}^v(B) \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathrm{D}^v(\Lambda^1(B)) \to \ldots \to \mathrm{D}^v(\Lambda^i(B)) \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathrm{D}^v(\Lambda^{i+1}(B)) \to \ldots$$
называется ∇-*комплексом* алгебры B, а его когомологии $H^*_\nabla(B) = \bigoplus_{i\geqslant 0} H^i_\nabla(B)$ — ∇-*когомологиями*.

Задача 13. Докажите, что дифференциал ∂_∇ обладает следующими свойствами:

1) $\partial_\nabla[\![X,Y]\!] = [\![\partial_\nabla X, Y]\!] + (-1)^X[\![X, \partial_\nabla Y]\!]$,
2) $[\mathrm{i}_X, \partial_\nabla] = (-1)^X \mathrm{i}_{\partial_\nabla X}$,
3) $\partial_\nabla(\omega \wedge X) = (d^v_\nabla - d)(\omega)\wedge X + (-1)^\omega \omega \wedge \partial_\nabla X$, где $d^v_\nabla = \mathrm{L}_{U_\nabla}$,
4) $[d^v_\nabla, \mathrm{i}_X] = \mathrm{i}_{\partial_\nabla X} + (-1)^X \mathrm{L}_X$.

Задача 14. Введем обозначения $d^h_\nabla = d - d^v_\nabla$ (см. задачу 13) и
$$\Lambda^1_v(B) = \{\,\text{подмодуль в } \Lambda^1(B),\ \text{порожденный образом } d^v_\nabla\,\},$$
$$\Lambda^1_h(B) = \{\,\text{подмодуль в } \Lambda^1(B),\ \text{порожденный образом } d^h_\nabla\,\}.$$

Положим также
$$\Lambda^p_h(B) = \underbrace{\Lambda^1_h(B)\wedge\ldots\wedge\Lambda^1_h(B)}_{p\ \text{раз}}, \quad \Lambda^q_v(B) = \underbrace{\Lambda^1_v(B)\wedge\ldots\wedge\Lambda^1_v(B)}_{q\ \text{раз}}.$$

Докажите, что:

1) Пара (d^v_∇, d^h_∇) образует бикомплекс, то есть
$$d^v_\nabla\circ d^v_\nabla = 0, \quad d^h_\nabla\circ d^h_\nabla = 0, \quad d^v_\nabla\circ d^h_\nabla + d^h_\nabla\circ d^v_\nabla = 0.$$

[1] Конечно, для корректности этого определения следует доказать, что $\nabla(X)\circ Y - \nabla(Y)\circ X$ лежит в $\mathrm{D}_1(A,B)$.

2) Имеет место разложение в прямую сумму

$$\Lambda^i(B) = \bigoplus_{p+q=i} \Lambda_h^p(B) \otimes \Lambda_v^q(B). \tag{1}$$

3) Имеют место вложения

$$d_\nabla^h(\Lambda_h^p(B) \otimes \Lambda_v^q(B)) \subset \Lambda_h^{p+1}(B) \otimes \Lambda_v^q(B),$$
$$d_\nabla^v(\Lambda_h^p(B) \otimes \Lambda_v^q(B)) \subset \Lambda_h^p(B) \otimes \Lambda_v^{q+1}(B).$$

Определение 5. Бикомплекс (d_∇^v, d_∇^h) называется *вариационным бикомплексом*, ассоциированным со связностью ∇. Комплекс

$$0 \to B \xrightarrow{d_\nabla^h} \Lambda_h^1(B) \to \ldots \to \Lambda_h^i(B) \xrightarrow{d_\nabla^h} \Lambda_h^{i+1}(B) \to \ldots$$

называется *горизонтальным комплексом де Рама* этой связности.

Задача 15. Представление (1) влечет разложение в прямую сумму

$$\mathrm{D}_1(\Lambda^i(B)) = \bigoplus_{p+q=i} \mathrm{D}_1(\Lambda_h^p(B) \otimes \Lambda_v^q(B)).$$

Докажите, что $\partial_\nabla\big(\,\mathrm{D}_1(\Lambda_h^p(B) \otimes \Lambda_v^q(B))\big) \subset \mathrm{D}_1(\Lambda_h^{p+1}(B) \otimes \Lambda_v^q(B))$.

Задача 16. Из задач 14 и 15 следует, что для любых $q \geqslant 0$ определены комплексы

$$0 \to \Lambda_v^q(B) \xrightarrow{d_\nabla^h} \Lambda_h^1(B) \otimes \Lambda_v^q(B) \to \ldots \to \Lambda_h^i(B) \otimes \Lambda_v^q(B) \xrightarrow{d_\nabla^h} \Lambda_h^{i+1}(B) \otimes \Lambda_v^q(B) \to \ldots$$

и

$$0 \to \mathrm{D}_1\left(\Lambda_v^q(B)\right) \xrightarrow{d_\nabla^h} \mathrm{D}_1\left(\Lambda_h^1(B) \otimes \Lambda_v^q(B)\right) \to \ldots$$
$$\ldots \to \mathrm{D}_1\left(\Lambda_h^i(B) \otimes \Lambda_v^q(B)\right) \xrightarrow{d_\nabla^h} \mathrm{D}_1\left(\Lambda_h^{i+1}(B) \otimes \Lambda_v^q(B)\right) \to \ldots$$

Эти комплексы можно понимать как горизонтальные комплексы де Рама с коэффициентами в модулях $\Lambda_v^q(B)$ и $\mathrm{D}_1\left(\Lambda_v^q(B)\right)$ соответственно. Пусть P — произвольный B-модуль. Какими дополнительными структурами следует его наделить, чтобы можно было определить горизонтальный комплекс с коэффициентами в P?