Анализ-2000. 3 семестр, листок 3

Ниже рассматриваются функции, векторные поля и формы в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Область в $\mathbb{R}^3$ — тоже многообразие, но со специфической особенностью: в нём имеется евклидова структура — скалярное произведение, — позволяющая отождествить касательное и кокасательное пространства. А именно: вектору v сопоставляется функционал $(v, \cdot)$ и наоборот (скобки обозначают скалярное произведение).

Функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ сопоставим 0-форму $\omega_f^0 = f$ и 3-форму $\omega_f^3 = f\,dV$ (dV — форма объёма, по определению $dV(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{Vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Vmatrix}$ — ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3).

Векторному полю v в области D сопоставим 1-форму $\omega_v^1(x)(u) = (v(x), u)$, $u \in TD_x$, и 2-форму $\omega_v^2(x)(u_1, u_2) = \det \begin{Vmatrix} v(x) & u_1 & u_2 \end{Vmatrix}$, $u_1, u_2 \in TD_x$.

1. Проверьте, что описанные соответствия взаимно однозначны.

Векторные поля в D можно перемножать скалярно: $(v, u)(x) = (v(x), u(x))$ и векторно: $(v, u)(x) = v(x) \times u(x)$ (другое обозначение векторного произведения — $[v, u]$).

2. Проверьте, что

$$\text{а) } \omega_v^1 \wedge \omega_u^1 = \omega_{v\times u}^2; \quad \text{б) } \omega_v^1 \wedge \omega_u^2 = \omega_{(v,u)}^3.$$

Контрольный вопрос: почему отсутствует пункт в): $\omega_v^2 \wedge \omega_u^2 = \ldots$?

Используя внешнее дифференцирование форм введём три классические операции векторного анализа:

функции f сопоставим векторное поле $\operatorname{grad} f$: $\omega_{\operatorname{grad} f}^1 \stackrel{\text{def}}{=} d\omega_f^0$ (градиент),

векторному полю v сопоставим векторное поле $\operatorname{rot} v$: $\omega_{\operatorname{rot} v}^2 \stackrel{\text{def}}{=} d\omega_v^1$ (ротор),

векторному полю v сопоставим функцию $\operatorname{div} v$: $\omega_{\operatorname{div} v}^3 \stackrel{\text{def}}{=} d\omega_v^2$ (дивергенция).

3. Выпишите выражения для градиента, ротора и дивергенции в декартовых координатах (или проверьте, что известные вам выражения согласованы с данным выше определением).

4. Докажите, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0.$$

Введённые формы можно записывать не только в декартовых координатах. В $\mathbb{R}^3$ часто используются ещё две системы координат: сферическая

$$(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta)$$

и цилиндрическая

$$(r, \varphi, h) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h).$$

5. а) Запишите введённые выше формы ω_f^i в сферических и цилиндрических координатах.

б)* Запишите выражения для градиента, ротора и дивергенции в сферических и цилиндрических координатах.

(Упражнение для терпеливых, рекомендуется найти хотя бы одно из 6 выражений.)

6. Пусть поле v в области $\{x : x \neq 0\}$ имеет вид $v(x) = -\frac{x}{|x|^3}$, ($|x|$ — длина x). Проверьте, что $\operatorname{div} v = 0$. Найдите $\operatorname{rot} v$. Существует ли такая функция f, что $v = \operatorname{grad} f$? (Если такая функция существует, она называется потенциалом, а поле — потенциальным.)

7. Пространство $\mathbb{R}^3$ вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью. Пусть v — поле линейных скоростей точек $\mathbb{R}^3$. Найдите $\operatorname{rot} v$.