Анализ-2000. 3 семестр, листок 4

В этом листке продолжается знакомство с классическим векторным анализом. Все функции предполагаются гладкими, а все области — компактными с кусочно-гладкой границей.

Выведите из общей теоремы Стокса об интегрировании форм следующие теоремы (для этого, в частности, нужно придать смысл выражениям, входящим в их формулировки).

1. Формула Грина. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$, P, Q — функции из D в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

2. Формула Гаусса – Остроградского. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$, P, Q, R — функции из D в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\iiint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial D} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.$$

3. Формула Стокса. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$, P, Q, R — функции из D в $\mathbb{R}$, S — кусочно-гладкая поверхность в D. Тогда

$$\int\limits_{\partial S} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Ещё две формулы Грина используют лапласиан Δ:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Мы также используем в этой формуле "элемент площади" $d\boldsymbol{\sigma}$. Во введённых нами в предыдущем листке обозначениях, 2-форма $(v, d\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \omega_v^2$. Настоятельно рекомендуется понять, почему её называют "элементом площади".

4. Формула Грина–2. f, g — функции из $D \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\, dx\, dy\, dz + \int\limits_D g\Delta f\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{\partial D} (g \operatorname{grad} f, d\boldsymbol{\sigma}).$$

5. Формула Грина–3. f, g — функции из $D \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_D g\Delta f - f\Delta g\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{\partial D} (g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g, d\boldsymbol{\sigma}).$$

Функция, для которой в некоторой области выполнено $\Delta f = 0$, называется гармонической в этой области.

6. Докажите, что если гармоническая функция равна 0 на границе, то она тождественно равна нулю во всей области (другими словами, значения гармонической функции внутри области полностью определяются её значениями на границе).

7. Есть ли потенциал у поля $\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}; \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$?

8. Пусть дивергенция поля равна нулю в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ и поле — центральное (симметрично относительно любых вращений относительно начала координат). Докажите, что тогда поле удовлетворяет закону обратных квадратов, т. е. пропорционально полю $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. (Физическая интерпретация дивергенции — плотность зарядов (источников поля). Эта задача говорит, что если источник поля есть только в начале координат и поле центральное, то оно удовлетворяет закону обратных квадратов.)

9. Пусть f_1, f_2, f_3 — функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, а g — функция из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$. Потенциально ли поле $g(x,y,z)(f_1(x), f_2(y), f_3(z))$? А если g определена внутри полнотория?

10. Является ли поле $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ (определённое в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$) ротором некоторого поля?