Анализ-2000. 3 семестр, листок 5

Определение. Пусть на многообразии X задана замкнутая невырожденная 2-форма ω, т. е. $d\omega = 0$ и для любого ненулевого $v_1 \in TX_q$ найдётся $v_2 \in TX_q$ такой, что $\omega(v_1, v_2) \neq 0$. Такая форма называется *симплектической формой*, а пара (многообразие, симплектическая форма на нём) называется *симплектическим многообразием.*

1. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ через $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Проверьте, что форма $\sum_i dp_i \wedge dq_i$ — симплектическая.

2. Определим в точке x симплектического многообразия (X, ω) отображение $T_xX \to T_x^*X$ по правилу $v \mapsto \varphi_v$, где $\varphi_v(u) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(u, v)$. Докажите, что определённое таким образом отображение — изоморфизм линейных пространств.

3. Докажите, что симплектических многообразий нечетной размерности не бывает.

4. Найдите симплектическую форму на двумерной сфере S^2.

5. Проверьте, является ли симплектической форма на S^4, получаемая ограничением формы $\sum_{1 \le i < j \le 5} dx_i \wedge dx_j$ на $\mathbb{R}^5$ (имеется в виду обратный образ формы при стандартном вложении $S^4 = \{(x_1, \ldots, x_5) \mid \sum x_i^2 = 1\}$).

Структуру симплектического многообразия можно естественным образом ввести на кокасательном расслоении к произвольному гладкому многообразию X. Кокасательное расслоение T^*X состоит из пар (x, φ), где $x \in X$, $\varphi \in T_x^*X$. Для кокасательного расслоения естественно определена проекция $\pi\colon T^*X \to X$ по правилу $\pi\colon (x, \varphi) \mapsto x$. Структура многообразия на T^*X вводится вводится так же, как и на касательном расслоении (см. листок 1). Конкретнее, если $U \subset X$ — координатная окрестность, то на $\pi^{-1}(U)$ кокасательный вектор $\sum p_i dx_i$, приложенный к точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, имеет координаты $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$.

Определим вначале 1-форму η на T^*X следующим образом. Пусть $(x, \varphi) \in T^*X$, $u \in T_{(x,\varphi)}(T^*X)$. Тогда $\eta(u) = \varphi(\pi_*(u))$, где π_* — отображение касательных пространств.

Теперь полагаем $\omega = d\eta$.

6. Докажите, что ω — симплектическая форма.

Обозначим через $I\colon T_x^*X \to T_xX$ изоморфизм, обратный к изоморфизму, определенному в задаче 2. Пусть на симплектическом многообразии X задана (гладкая) функция $H\colon X \to \mathbb{R}$, тогда изоморфизм I позволяет определить на X векторное поле $I\,dH$. Такое векторное поле называется *гамильтоновым*, а H — функцией Гамильтона. (А если гамильтоново поле $I\,dH$ задаёт фазовый поток $G\colon \mathbb{R} \times X \to X$, то такой фазовый поток называется гамильтоновым).

7. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с координатами p, q и симплектической формой $dp \wedge dq$ задана функция $H = (p^2 + q^2)/2$. Нарисуйте фазовые кривые гамильтонова поля $I\,dH$.

8. В $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ и симплектической формой $\omega = \sum p_i \wedge q_i$ рассмотрим гамильтоново поле, задаваемое функцией Гамильтона H. Напишите это поле в координатах (полученные дифференциальные уравнения называются, как и следовало ожидать, гамильтоновыми).

9. Пусть функция H на симплектическом многообразии определяет гамильтонов поток $g_t\colon X \to X$. Докажите, что $H(g_t x)$ не зависит от t (это закон сохранения энергии).

На симплектическом многообразии (X, ω) можно определить скобку Пуассона $\{F, H\}$ двух функций $F\colon X \to \mathbb{R}$ и $H\colon X \to \mathbb{R}$ формулой

$$\{F, H\}(x) = (dF)_x(I\,dH_x).$$

10. Докажите, что скобка Пуассона — кососимметрическая билинейная функция от F, H.

11. Докажите тождество Лейбница: $\{F, H_1 H_2\} = H_1\{F, H_2\} + H_2\{F, H_1\}$.

12. Пусть функция H на симплектическом многообразии определяет гамильтонов поток $g_t\colon X \to X$. Докажите, что $F(g_t x)$ не зависит от t тогда и только тогда, когда $\{F, H\} = 0$ на X.

13. Коммутатор двух гамильтоновых полей $[I\,dA, I\,dB]$ — гамильтоново поле, с функцией Гамильтона $\{A, B\}$.

14.* Скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0.$$

15.* Докажите, что гамильтонов фазовый поток сохраняет форму ω: $(g_t)^*\omega = \omega$.

Лагранжевым подмногообразием симплектического многообразия (X, ω) размерности $2n$ называется подмногообразие $L \subset X$ половинной размерности, на котором форма ω равна 0 тождественно.

16. Пусть Y — подмногообразие X. Вложение $i\colon Y \to X$ определяет в любой точке $y \in Y \subset X$ вложение касательных пространств $i_*\colon T_yY \to T_yX$. Рассмотрим подмногообразие $N \subset T^*X$, состоящее из таких пар (y, φ), что $y \in Y$, а φ тождественно обращается в 0 на i_*T_y. Докажите, что N — лагранжево многообразие в T^*X.

17. Всякая 1-форма ξ на X определяет подмногообразие M_ξ в T^*X: множество пар (x, ξ_x). Найдите условия на форму ξ, при которых M_ξ — лагранжево многообразие.