# Анализ-2000. 3 семестр, листок 6

Пусть $v$ — векторное поле, а $\omega$ — форма степени $k+1$ на многообразии $X$. Форма $\iota_v(\omega)$ степени $k$ определяется так:

$$\iota_v(\omega)(u_1, \dots, u_k) = \omega(v, u_1, \dots, u_k).$$

**1.** Докажите, что

$$\iota_v(\omega_1 + \omega_2) = \iota_v(\omega_1) + \iota_v(\omega_2), \quad \iota_v(\omega_1 \wedge \omega_2) = \iota(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \iota(\omega_2)$$

(во второй формуле $k$ — степень формы $\omega_1$).

Пусть $v$ — векторное поле на многообразии $X$. Тогда производная формы вдоль векторного поля определяется как $v(\omega) = \frac{d}{dt}(g_t^*\omega - \omega)$, где $g_t$ — поток, определяемый полем $v$, $g_t^*\omega$ — обратный образ формы.

**2.** Докажите, что $v(\omega) = d \circ \iota_v + \iota_v \circ d$.

**3.** Покажите, что отображение $\varphi_v\colon \omega \mapsto v(\omega)$ переводит замкнутые формы в замкнутые, а точные — в точные. Значит, отображение $\varphi_v$ индуцирует какое-то отображение когомологий Де Рама в себя. Что можно сказать об этом отображении?

**4.** Пусть $g_t$ — глобальный фазовый поток на многообразии $X$. Опишите отображения $g_t^*\colon H^i_{\mathrm{DR}}(X) \to H^i_{\mathrm{DR}}(X)$.

**5.** Докажите для 1-формы $\omega$ и векторных полей $v_1, v_2$ формулу для $d\omega$

$$d\omega(v_1, v_2) = v_1(\omega(v_2)) - v_2(\omega(v_1)) - \omega([v_1, v_2]).$$

**6.** Пусть $v_0, v_1, \dots, v_k$ — поля, $\omega$ — форма. Докажите, что

$$v_0(\omega(v_1, \dots, v_k)) = v_0(\omega)(v_1, \dots, v_k) + \sum_{i=1}^{k} \omega(v_1, \dots, [v_0, v_i], \dots, v_k).$$

**7.** Пусть $v_0, v_1, \dots, v_k$ — поля, $\omega$ — форма. Докажите формулу Картана

$$d\omega(v_0, v_1, \dots, v_k) =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j v_j(\omega(v_0, \dots, \not{v}_j, \dots, v_k)) + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, \dots, \not{v}_i, \dots, \not{v}_j, \dots, v_k)),$$

где $\not{v}_j$ обозначает пропускаемую переменную.

Риманова метрика на многообразии $X$ — это положительно определенная квадратичная форма $g$ на $T_pX$, гладко зависящая от $p$. Если на многообразии задана риманова метрика (такое многообразие называется римановым), то в каждом $T_pX$ определено скалярное произведение.

**8.** Докажите, что на ориентированном римановом многообразии размерности $n$ есть $n$-форма $\nu$, которая принимает в каждой точке значение 1 на ортонормированных относительно римановой метрики положительно ориентированных базисах.

Такая форма называется формой объема, а интеграл от нее по $X$ называется, соответственно объемом многообразия (в 1-мерном случае — длиной, в 2-мерном случае — площадью).

**9.** Пусть $g$ задается в координатах в виде $\sum_{ij} g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Напишите выражение для формы объема.

Любое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ наследует риманову метрику (ограничение скалярного произведения на касательное пространство).

**10.** Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая. Запишите ее форму длины.

**11.** Пусть $x_0 = f(x_1, \ldots, x_n)$ — график гладкой функции. Запишите форму объема на нем.

**12.** Найдите форму объема и площадь круглого тора (это поверхность, полученная вращением двух окружностей радиуса $r$ вокруг серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему центры этих окружностей, расстояние между центрами обозначьте $2R$).

**13.** Найдите площадь поверхности, заданной в $\mathbb{R}^4$ уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \qquad x_3^2 + x_4^2 = 1.$$