Лекция 21. Касательные векторы

Для начала условимся, что словосочетание «гладкое многообразие» будет означать «гладкое многообразие класса C^∞», а слово «гладкий» будет означать «класса C^∞». Потеря общности при таком ограничении минимальна (всякое многообразие класса C^r, где $r \geqslant 1$, будет C^r-диффеоморфно многообразию класса C^∞), зато формулировки освобождаются от громоздких оговорок.

Напомним определение касательного пространства.

Пусть X — гладкое многообразие и $p \in X$. *Касательным пространством* к многообразию X в точке p называется множество классов эквивалентности гладких кривых, проходящих через p. Здесь гладкая кривая, проходящая через p, — это, по определению, такое гладкое отображение $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, что $c(0) = p$ (число $\varepsilon > 0$ у разных кривых может быть разным), и две гладкие кривые c_1 и c_2, проходящие через p, называются эквивалентными, если для любой координатной окрестности $U \subset X$, $U \ni x$ и локальной карты $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^{\dim X}$ выполнено равенство $D(\varphi \circ c_1)(0) = D(\varphi \circ c_2)(0)$. Достаточно проверить выполнение этого равенства для какой-то одной локальной карты. Касательное пространство к многообразию X в точке p обозначается $\mathcal{T}_pX$, а его элементы называются *касательными векторами в точке p*. Если X и Y — гладкие многообразия и $f\colon X \to Y$ — гладкое отображение, то *производной* отображения f в точке $x \in X$ называется отображение $Df(x)\colon \mathcal{T}_xX \to \mathcal{T}_{f(x)}Y$, которое переводит класс эквивалентности кривой $c\colon (-\varepsilon; \varepsilon) \to X$ в класс эквивалентности кривой $f \circ c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$. Если точка x ясна из контекста, вместо $Df(x)$ пишут еще f_*.

Пространство $\mathcal{T}_pX$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с пространством $\mathbb{R}^n$, где $n = \dim X$. В самом деле, производная от отображения $\varphi \circ c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, будучи линейным отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$, полностью определяется образом элемента $1 \in \mathbb{R}$, то есть вектором в $\mathbb{R}^n$, и обратно, для любого вектора $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ производная отображения $t \mapsto \varphi^{-1}(a_1t, \ldots, a_nt)$, где φ — локальная карта. Разумеется, при другом выборе локальной карты тому же касательному вектору будет соответствовать уже другой элемент $\mathbb{R}^n$.

Если в локальных координатах отображение f записывается в виде

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n),$$

то, как мы проверили в прошлом семестре, отображение f_* записывается (при отождествлении $\mathcal{T}_pX$ и $\mathcal{T}_{f(p)}Y$ с $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, задаваемом теми же локальными координатами) формулой

$$(a_1,\dots,a_n)\mapsto\Big(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_1}{\partial x_i}a_i,\dots,\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_m}{\partial x_i}a_i\Big). \qquad (21.1)$$

Поскольку $\mathbb{R}^n$ — не просто множество, но векторное пространство, хочется ввести структуру векторного пространства на $\mathcal{T}_pX$. Именно, если элементы $v,w\in\mathcal{T}_pX$ соответствуют при вышеописанном отождествлении векторам $(a_1,\dots,a_n)$ и $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, то хочется назвать их суммой элемент $\mathcal{T}_pX$, соответствующий вектору $(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$ (аналогично с умножением на число). Производная гладкого отображения окажется при этом, как показывает формула (21.1), линейным отображением.

Чтобы такое определение сложения касательных векторов было корректным, нужно кое-что проверить: поскольку отождествление $\mathcal{T}_pX$ и $\mathbb{R}^n$ устанавливалось с помощью локальных координат, надо убедиться, что сумма касательных векторов v и w, определенная с помощью некоторой локальной карты, не изменится, если вычислить ее с помощью другой карты. Это нетрудно сделать непосредственно, но мы установим корректность определения суммы касательных векторов, дав эквивалентное определение $\mathcal{T}_pX$, в котором структура векторного пространства усматривается без обращения к локальным координатам. Так или иначе, давайте пока запомним, что касательное пространство в любой точке n-мерного многообразия является векторным пространством, изоморфным $\mathbb{R}^n$.

Предупреждение 21.1. Изоморфизм между $\mathcal{T}_pX$ и $\mathbb{R}^n$, который мы установим, ни в каком смысле не является естественным. В общем случае не существует разумного способа отождествить между собой пространства $\mathcal{T}_xX$ при различных $x\in X$.

Вот первое определение в этом семестре:

Определение 21.2. Пусть X — гладкое многообразие и $p\in X$. *Ростком гладкой функции в точке p* называется класс эквивалентности пар (f,U), где $U\ni p$ — открытое множество и f — гладкая функция на U, относительно следующего отношения эквивалентности: пары (f,U) и (g,V) называются эквивалентными, если существует такое открытое множество $W\subset U\cap V$, $W\ni p$, что $f|_W=g|_W$.

Ростки функций можно (так же, как и сами функции) складывать и умножать: суммой ростков, представленных парами (f,U) и (g,V), называется росток, представленный парой $(f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}, U \cap V))$, а произведением этих ростков называется росток, представленный парой $(f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}, U\cap V)$. Бесхитростная проверка, оставляемая читателю в качестве упражнения, показывает, что сумма и произведение ростков не зависит от выбора представителей в классе эквивалентности.

Определение 21.3. *Локальным кольцом* многообразия X в точке $p \in X$ называется множество ростков гладких функций в точке p с введенными выше операциями сложения и умножения. Локальное кольцо многообразия X в точке p обозначается $\mathcal{O}_{X,p}$ или (если из контекста ясно, о каком многообразии идет речь) просто $\mathcal{O}_p$.

Ясно, что всякое локальное кольцо любого n-мерного многообразия изоморфно локальному кольцу начала координат в $\mathbb{R}^n$.

Локальные кольца связаны с касательными векторами следующим образом. Пусть $v \in \mathcal{T}_pX$ — касательный вектор, представленный кривой $c\colon (-\varepsilon;\varepsilon) \to X$. Поставим ему в соответствие отображение $D_v\colon \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$(f, U) \mapsto (f \circ c)'(0)$$

(если не весь интервал $(-\varepsilon;\varepsilon)$ попадает при отображении c во множество U, надо заменить отображение c на его ограничение на $c^{-1}(U) \subset (-\varepsilon;\varepsilon)$; ясно, что полученная кривая определяет тот же касательный вектор). Можно сказать, что D_v сопоставляет функции f (точнее, ее ростку) производную f в точке p вдоль кривой, представляющей вектор v.

Поскольку и элементы $\mathcal{T}_pX$, и элементы $\mathcal{O}_{X,p}$ — классы эквивалентности, надо проверить, во-первых, что образ ростка функции при отображении D_v не зависит от выбора пары (f, U), представляющей этот росток, и, во-вторых, что само отображение D_v не зависит от выбора кривой, представляющей касательный вектор v.

Первое из этих утверждений очевидно, а второе мы сейчас проверим.

Именно, положим $\dim X = n$. Поскольку всякая точка $p \in X$ обладает окрестностью, диффеоморфной открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, а росток функции не меняется при ограничении функции на меньшее открытое подмножество, можно сразу считать, что $X = V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $p \in V$. Если $c\colon (-\varepsilon;\varepsilon) \to V$ — гладкая кривая, проходящая через точку p, записанная в координатах по формуле $t \mapsto (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, и (f, U) — представитель ростка функции в точке p, то по формуле производной сложной функции имеем

$$(f \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \tag{21.2}$$

Поскольку кривые c и $\tilde{c}$, для которых $c_i'(0) = \tilde{c}_i'(0)$ для всех i, определяют один и тот же касательный вектор, формула (21.2) показывает, что отображение $D_v \colon \mathcal{O}_x \to \mathbb{R}$ действительно зависит только от касательного вектора v, а не от представляющей его кривой.

В формуле (21.2) положим $c_i'(0) = a_i$. Тогда отображение D_v запишется в виде

$$D_v \colon f \mapsto a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{21.3}$$

Поскольку для всякого набора чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ найдется кривая, для которой эти числа будут производными в нуле (например, кривая $t \mapsto (a_1 t, \ldots, a_n t)$), и поскольку этот набор однозначно восстанавливается по отображению D_v (именно, $a_i = D_v(x_i)$), мы доказали следующее утверждение:

Предложение 21.4. *Пусть X — гладкое многообразие размерности n, $x \in X$, $U \ni x$ — координатная окрестность, $\varphi \colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ — локальная карта и $p = \varphi(x)$. Тогда отображение $v \mapsto D_v$ задает изоморфизм между касательным пространством к X в точке x и множеством отображений из $\mathcal{O}_{X,x}$ в $\mathbb{R}$, заданных по формуле $f \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(p)$, где $a_i \in \mathbb{R}$ — константы.*

Сокращенно отображение, заданное формулой (21.3), обозначают $\sum a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Доказанное предложение дает нам право отождествить касательные векторы с отображениями вида (21.3), что мы время от времени и будем делать.

Итак, касательные векторы — это «то́, по чему можно дифференцировать». Покажем, что касательные векторы в точке p можно определить чисто алгебраически, исходя исключительно из локального кольца в этой точке.

Для начала заметим, что для всякого $v \in \mathcal{T}_p X$ отображение $D = D_v$ обладает, очевидно, следующими свойствами:

$$\begin{aligned} D(\lambda f + \mu g) &= \lambda D_v(f) + \mu D_v(g) \qquad \text{если } \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ D(fg) &= f(p) \cdot D(g) + g(p) \cdot f; \\ D(\lambda) &= 0, \qquad \text{если } \lambda \text{ — константа.} \end{aligned} \tag{21.4}$$

Обозначение 21.5. Множество отображений из $\mathcal{O}_p$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (21.4), обозначается $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$.

Оказывается, что и обратно, всякий элемент $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ имеет вид D_v для некоторого $v \in \mathcal{T}_p X$. Чтобы в этом убедиться, посмотрим повнимательнее на устройство локального кольца $\mathcal{O}_p$. Обозначим через $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ идеал, состоящий из ростков функций, обращающихся в нуль в точке p. Идеал $\mathfrak{m}_p$ называется *максимальным идеалом* локального кольца $\mathcal{O}_p$ (поскольку он и впрямь является его единственным максимальным идеалом). Пусть n — размерность нашего многообразия X; тогда кольцо $\mathcal{O}_{X,p}$ изоморфно, как мы уже отмечали, кольцу $\mathcal{O}_{V,o}$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $o \in \mathbb{R}^n$ — начало координат. Далее будем писать $\mathcal{O}$ вместо $\mathcal{O}_{V,o}$ и $\mathfrak{m}$ вместо $\mathfrak{m}_{V,o}$.

Идеал $\mathfrak{m}$ содержит, в частности, ростки координатных функций $x_1, \ldots, x_n$.

Предложение 21.6 (лемма Адамара). *В кольце $\mathcal{O}$ идеал $\mathfrak{m}$ порожден своими элементами $x_1, \ldots, x_n$ (иными словами, для всякого $f \in \mathfrak{m}$ выполнено равенство $f = g_1x_1 + \ldots + g_nx_n$, где $g_1, \ldots, g_n$ — какие-то элементы кольца $\mathcal{O}$).*

Доказательство. Если бы мы могли быть уверены, что функция, представляющая наш росток, аналитична (то есть представляется в виде суммы сходящегося в некоторой окрестности начала координат степенного ряда), то утверждение было бы почти очевидным: поскольку $f(o) = 0$, в степенном ряде, сходящемся к f, отсутствует свободный член, и можно записать $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, где в степенном ряде f_i все слагаемые содержат x_i; выделяя x_i сомножителем из f_i, получаем требуемое равенство $f = \sum x_i g_i$. Возможность перестановки слагаемых и сходимость степенных рядов g_i следуют из того, что сходящийся в некоторой окрестности начала степенной ряд сходится — возможно, в меньшей окрестности — абсолютно по sup-норме (доказательство такое же, как для рядов от одного переменного, по модулю более громоздких обозначений). Поскольку, однако, C^∞-функции аналитическими быть не обязаны, придется рассуждать иначе. Начнем с леммы, представляющей и самостоятельный интерес:

Лемма 21.7. *Пусть F — функция класса C^1 на открытом множестве, содержащем прямоугольник $[0;1] \times [a;b] \subset \mathbb{R}^2$. Для $x \in [a;b]$ положим $\Phi(x) = \int_0^1 F(t,x)\,dt$. Тогда функция Φ непрерывно дифференцируема на $(a;b)$, причем $\Phi'(u) = \int_0^1 F_x(t,u)\,dt$.* □

Доказательство леммы оставляется читателю (воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница и возможностью изменить порядок интегрирования в повторном интеграле).

Вооружившись леммой, докажем предложение так. Пусть росток из $\mathfrak{m}$ представлен парой (f, U). Тогда для некоторого $r > 0$ замкнутый шар $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant r\}$ содержится в U. Поскольку $f(0) = 0$, для всякого $x \in U$ выполнено равенство

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \ldots, tx_n)\, dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt.$$

Положим $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt$. Применяя лемму 21.7, убеждаемся (по индукции), что функции g_i гладки (класса C^∞) во внутренности шара B, что и завершает доказательство. $\square$

Замечание 21.8. Если в лемме Адамара не предполагать бесконечной дифференцируемости функции f, произойдет потеря гладкости: для $f \in C^r$, $r < \infty$, можно гарантировать только, что $g_i \in C^{r-1}$.

Пусть $\mathcal{O}_p$ — локальное кольцо точки p. Через $\mathfrak{m}_p^2 \subset \mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ обозначается идеал кольца $\mathcal{O}_p$, состоящий из всевозможных сумм вида $f_1 g_1 + \ldots + f_m g_m$, где все f_i и g_i лежат в $\mathfrak{m}_p$ (число слагаемых произвольно)[1]. Поскольку и $\mathfrak{m}_p$, и $\mathfrak{m}_p^2$ являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$, можно рассмотреть факторпространство $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, а также сопряженное к нему пространство $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$.

Предложение 21.9. *Пусть X — гладкое многообразие, $p \in X$. Тогда векторные пространства $\mathcal{T}_p X$, $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ естественно изоморфны.*

Слово «естественно» в формулировке этого предложения означает, что отображения, устанавливающие изоморфизмы, не зависят от выбора локальных координат.

Доказательство. Сначала установим изоморфизм между $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ и $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Это — чистая алгебра. Именно, пусть $D\colon \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$ — элемент пространства $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. Заметим, что D является тождественным нулем на $\mathfrak{m}_p^2 \subset \mathcal{O}_p$. В самом деле, если $f, g \in \mathfrak{m}_p$, то

[1] Вообще, если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы в коммутативном кольце A, то через $\mathfrak{ab} \subset A$ обозначается наименьший идеал кольца A, содержащий все произведения ab, где $a \in \mathfrak{a}$ и $b \in \mathfrak{b}$; легко видеть, что $\mathfrak{ab}$ состоит из всевозможных сумм вида $a_1 b_1 + \ldots + a_m b_m$, где $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$.

$D(fg) = g(p)D(f) + f(p)D(g) = 0$, поскольку $f(p) = g(p) = 0$. Ограничим D на $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ — получится линейный функционал на $\mathfrak{m}_p$; поскольку, в силу вышесказанного, он обращается в нуль на $\mathfrak{m}_p^2$, мы можем рассматривать его как линейный функционал на $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, то есть как элемент пространства $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Обозначим этот элемент через $i(D)$; тем самым мы определили гомоморфизм $i\colon \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_x, \mathbb{R}) \to (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Обратно, пусть $\xi \in (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Будем рассматривать ξ как линейный функционал на $\mathfrak{m}_p$, являющийся тождественным нулем на $\mathfrak{m}_p^2$. Определим теперь отображение $D(\xi)\colon \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$ по формуле $D(\xi)\colon f \mapsto \xi(f - f(p))$ (поскольку функция $f - f(p)$ обращается в нуль в точке p, правая часть определена). Покажем, что $D(\xi)$ удовлетворяет условиям (21.4) и тем самым лежит в $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. Единственное, что нуждается в проверке, — второе из этих условий («формула Лейбница»). Она устанавливается так. Для любых $f, g \in \mathcal{O}_p$ имеем

$$\begin{aligned} D(\xi)(fg) &= \xi(fg - f(p)g(p)) = \\ &= \xi(\,(f - f(p))(g - g(p)) + f(p)(g - g(p)) + g(p)(f - f(p))\,) = \\ &= \xi(\,(f - f(p))(g - g(p)) + f(p)\xi(g - g(p)) + g(p)\xi(f - f(p)\,) = \\ &= f(p)D(\xi)(g) + g(p)D(\xi)(f) \end{aligned}$$

(первое слагаемое в третьей строке равно нулю, поскольку $(f - f(p))(g - g(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$). Осталось проверить, что гомоморфизмы i и D взаимно обратны; это оставляется читателю в качестве обязательного упражнения.

Теперь установим изоморфизм между $\mathcal{T}_pX$ и $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. Тут нам уже понадобится лемма Адамара.

Заметим для начала, что в процессе доказательства предложения 21.4 мы построили естественное отображение $v \mapsto D_v$, задающее гомоморфизм из $\mathcal{T}_pX$ в $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$, и даже установили, что этот гомоморфизм является мономорфизмом. Чтобы установить его эпиморфность (то есть что всякий элемент из $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ имеет вид D_v для некоторого касательного вектора v), воспользуемся локальными координатами; перейдя к локальной карте, можно, как и раньше, считать, что X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $p = o$ — начало координат. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в доказательстве леммы Адамара.

Итак, пусть $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}, \mathbb{R})$. В силу третьего из условий (21.4) имеем $D(f) = D(f - f(o))$; запишем, по лемме Адамара, $f - f(o) = \sum x_i g_i$. Беря частные производные от обеих частей этого равенства, легко видеть, что $g_i(o) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(o)$. Теперь запишем:

$$Df = D(f - f(o)) = \sum D(x_i g_i) = \sum (x_i(o) D(g_i) + g_i(o) D(x_i)) =$$
$$= \sum D(x_i) g_i(o) = \sum D(x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(o).$$

Полагая $D(x_i) = a_i$, получаем тем самым, что $D = D_v$, где $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, что и завершает доказательство. $\square$

Коль скоро мы нашли алгебраическое определение касательного пространства, стоит выяснить, как при этом определении записывается производная гладкого отображения.

Пусть $f\colon X \to Y$ — гладкое отображение гладких многообразий, и пусть $p \in X$ и $q = f(p) \in Y$. Отображение f индуцирует гомоморфизм локальных колец $f^*\colon \mathcal{O}_{Y,q} \to \mathcal{O}_{X,p}$, определенный следующим образом: ростку из $\mathcal{O}_{Y,q}$, представленному парой (h, U), ставится в соответствие росток из $\mathcal{O}_{X,p}$, представленный парой $(h \circ f, f^{-1}(U))$ (общий принцип: отображение пространств индуцирует гомоморфизм колец функций, направленный в противоположную сторону). Далее, $f^*(\mathfrak{m}_q) \subset \mathfrak{m}_p$ (если функция h обращается в нуль в точке $q = f(p)$, то функция $h \circ f$ обращается в нуль в точке p). Поскольку f^* — гомоморфизм колец, отсюда следует, что $f^*(\mathfrak{m}_q^2) \subset \mathfrak{m}_p^2$. Следовательно, гомоморфизм f^* индуцирует $\mathbb{R}$-линейное отображение $\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2 \to \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$. Сопряженное к этому линейному отображению обозначим $\mathcal{T}_p f\colon (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* \to (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*$. Как мы установили в предложении 21.9, пространства $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $(\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*$ суть касательные пространства $\mathcal{T}_p X$ и $\mathcal{T}_q Y$. Так вот, оказывается, что при этом отождествлении гомоморфизм $\mathcal{T}_p f$ — это то же самое отображение, что знакомая нам производная f в точке p. Более формально это утверждение запишется так:

Предложение 21.10. *Если обозначить изоморфизмы из предложения 21.9 через $\alpha_p\colon \mathcal{T}_p X \to (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $\alpha_q\colon \mathcal{T}_q Y \to (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_p^2)^*$, то нижеследующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_p X \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[d, "f_*"'] & (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* \arrow[d, "\mathcal{T}_p f"'] \\
\mathcal{T}_q Y \arrow[r, "\alpha_q"] & (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*
\end{tikzcd}$$

Доказательство, состоящее в бесхитростном прослеживании изоморфизмов, лучше проделать самостоятельно: ничего, кроме усидчивости, для этого не потребуется.