# Лекция 22. Векторные поля: алгебра

На предыдущей лекции мы занимались индивидуальными касательными векторами, а сейчас поработаем с их семействами.

Итак, пусть $X$ — гладкое многообразие. Семейство касательных векторов на $X$ — это отображение $v$, которое каждой точке $p \in X$ ставит в соответствие касательный вектор $v_p \in \mathcal{T}_p X$. При этом интерес представляют не какие попало семейства, а те, в которых $v_p$ «гладко зависит от $p$».

Как же придать точный смысл словам, взятым в кавычки? Можно было бы рассмотреть объединение (непересекающихся) пространств $\mathcal{T}_p X$ по всем $p \in X$ и ввести на этом объединении структуру гладкого многообразия (это многообразие обозначается $\mathcal{T}X$ и называется *касательным расслоением многообразия* $X$); после этого отображение, ставящее в соответствие точке $p \in X$ вектор $v_p \in \mathcal{T}_p X$, будет отображением из многообразия $X$ в многообразие $\mathcal{T}X$, и гладкая зависимость $v_p$ от $p$ означает, что отображение $v\colon X \to \mathcal{T}X$ («сечение касательного расслоения») является гладким. Тем не менее, мы воспользуемся другим (эквивалентным) определением.

Прежде всего заметим, что, как и в случае с функциями, гладкость нужно определять локально: мы будем считать, что векторное поле гладко, если гладко его ограничение на всякую координатную окрестность. Пусть теперь $U \subset X$ — координатная окрестность и $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ — локальная карта (мы обозначили $n = \dim X$). Тогда, как мы видели на прошлой лекции, касательный вектор в точке $p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$, где $(x_1, \dots, x_n) \in V$, можно записать в виде $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; значит, ограничение этого семейства на $U$ можно записать в этой локальной карте в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

**Определение 22.1.** Семейство касательных векторов на $n$-мерном многообразии $X$ называется *векторным полем,* если для любой точки $p \in X$ существуют такие координатная окрестность $U \ni p$ и локальная карта $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$, что при записи в этой карте семейства в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$, функции $a_1, \dots, a_n$ являются гладкими.

Чтобы этим определением можно было реально пользоваться, надо убедиться, что функции $a_i$ будут гладкими при записи векторного поля в виде $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, в *любых* локальных координатах. Сделаем это. Пусть открытое подмножество $U \subset X$ входит в область определения сразу двух локальных карт $\varphi_1\colon U \to V_1$ и $\varphi_2\colon U \to V_2$. Если обозначить через $(x_1, \dots, x_n)$ координаты в том $\mathbb{R}^n$, в котором лежит $V_1$, и через $(y_1, \dots, y_n)$ — в том, в котором лежит $U_2$, то «функция перехода»

$\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \colon U_2 \to U_1$ задает $(x_1, \ldots, x_n)$ как функцию от $(y_1, \ldots, y_n)$. Если теперь в $y$-координатах семейство касательных векторов записывается в виде $\sum b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, то для произвольной гладкой функции $f$ имеем (по правилу дифференцирования сложной функции)

$$\sum_i b_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_i b_i(y_1, \ldots, y_n) \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \\ = \sum_j \Big( \sum_i b_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \Big) \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_j a_j \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

где $a_j = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial y_i} b_i(y_1, \ldots, y_n)$. В матричной записи это выглядит как $a \circ \psi = Jb$, где $J$ — матрица Якоби $\|\partial x_j / \partial y_i\|$. Поскольку $J$ — матрица из гладких функций с необращающимся в нуль определителем, из правила Крамера следует, что функции $a_1, \ldots, a_n$ гладки тогда и только тогда, когда гладки $b_1, \ldots, b_n$, что и требовалось установить.

Если продифференцировать функцию по касательному вектору, то получится число; если продифференцировать функцию по векторному полю, то есть семейству касательных векторов, то получится функция:

**Определение 22.2.** Пусть $v$ — векторное поле на многообразии $X$, $f$ — гладкая функция на $X$. *Производной функции $f$ по векторному полю $v$* называется функция $v(f)$, действующая по правилу $x \mapsto v_x(\mathbf{f}_x)$, где $\mathbf{f}_x \in \mathcal{O}_x$ — росток функции $f$ в точке $x$.

Если в локальных координатах векторное поле $v$ записывается в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$, то в этих же координатах имеем $v(f) = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$; так как функции $a_i$ гладки, то функция $v(f)$ также гладка, так что дифференцирование по векторному полю переводит гладкие функции в гладкие.

В следующем (очевидном) предложении используется следующее обозначение: $\mathcal{O}(X)$ — кольцо гладких функций на гладком многообразии $X$.

**Предложение 22.3.** *Если $X$ — гладкое многообразие, $f, g \in \mathcal{O}(X)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v$ — векторное поле на $X$, то*

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g);$$
$$v(fg) = v(f) \cdot g + f \cdot v(g).$$

Свойства дифференцирования по векторному полю, перечисленные в предложении 22.3, лежат в основе следующего определения:

**Определение 22.4.** Пусть $A$ — коммутативное кольцо[1] и $B \subset A$ — его подкольцо. Отображение $D\colon A \to A$ называется *дифференцированием кольца $A$ над $B$* (говорят еще: *$B$-дифференцированием кольца $A$*), если при любых $f, g \in A$ и $c \in B$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} D(f \pm g) &= D(f) \pm D(g); \\ D(fg) &= D(f) \cdot g + f \cdot D(g); \\ D(c) &= 0. \end{aligned}$$

Множество дифференцирований $A$ над $B$ обозначается $\mathrm{Der}_B(A)$.

Первое из условий в этом определении означает, что $D$ — эндоморфизм аддитивной группы кольца, второе условие называется тождеством Лейбница, а третье означает, что элементы подкольца $B$ играют роль констант; из этого условия и тождества Лейбница немедленно следует, что $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$, как только $\lambda, \mu \in B$ и $f, g \in A$. Используя введенную терминологию, можно пересказать предложение 22.3 следующим образом: всякое векторное поле на гладком многообразии $X$ является дифференцированием $\mathcal{O}(X)$ над $\mathbb{R}$ (подразумевается, что $\mathbb{R}$ вложено в $\mathcal{O}(X)$ в качестве подкольца, состоящего из постоянных функций).

Интересно, что верно и обратное (и тем самым векторные поля на многообразии можно определить чисто алгебраически):

**Предложение 22.5.** *Пусть $X$ — гладкое многообразие. Тогда для всякого дифференцирования $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X), \mathbb{R})$ существует и единственно векторное поле $v$ на $X$, для которого $v(f) = D(f)$ при всех $f \in \mathcal{O}(X)$.*

*Доказательство.* Начнем с технической леммы.

**Лемма 22.6.** *Пусть $U$ — открытое подмножество в гладком многообразии $X$, $p \in U$. Тогда существуют такие открытое множество $U_1 \subset U$, содержащее $p$, и гладкая функция $f \in \mathcal{O}(X)$, что $\operatorname{supp} f \subset U$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in U_1$.*

*Доказательство леммы.* В случае, когда $X$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, требуемая функция строится так. Во-первых, как вы знаете (например, из листков к семинарам), функция

$$\psi_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

[1] В нашем курсе слово «кольцо» всегда означает «кольцо с единицей», а «подкольцо» — «подкольцо, содержащее единицу».

принадлежит классу $C^\infty$. Отсюда немедленно следует, что функция $\psi_2(x) = \psi_1(1/4 - (x - 1/2)^2)$ бесконечно дифференцируема, неотрицательна, и ее носитель содержится в $[0;1]$, а функция $\psi_3(x) = \mathrm{const}\cdot\int_0^x \psi_2(t)\,dt$ имеет (при подходящем выборе константы) множество значений $[0;1]$, причем $\psi_3(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $\psi_3(x) = 1$ при $x \geqslant 1$. Если теперь $a \in \mathbb{R}^n$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то функция $h(x) = \psi_3\Big(\dfrac{\varepsilon_2^2 - \|x-a\|^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}\Big)$ (где $\|\cdot\|$ — евклидова норма) принадлежит классу $C^\infty$ на $\mathbb{R}^n$, тождественно равна единице на $B_{\varepsilon_1}(a)$, и ее носитель содержится в $\bar{B}_{\varepsilon_2}(a)$. Выбрав $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ таким образом, чтобы $\bar{B}_{\varepsilon_2}(a) \subset U$ и положив $U_1 = B_{\varepsilon_1}(a)$, получим, что ограничение функции $h$ на открытое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет нашим требованиям.

В общем случае рассмотрим координатную окрестность $V \ni p$ и построим (пользуясь тем, что координатная окрестность диффеоморфна открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$) функцию $\widetilde{h}$, определенную на $V$, равную единице в окрестности точки $p$, и такую, что $\operatorname{supp}\widetilde{h}$ компактен. Тогда, продолжая $\widetilde{h}$ нулем вне $V$, получим то, что нам требовалось. $\square$

**Следствие 22.7.** *Всякий элемент локального кольца $\mathcal{O}_p$, где $p$ — точка на гладком многообразии $X$, является ростком некоторой гладкой функции, определенной на всем многообразии.*

*Доказательство следствия.* Пусть элемент кольца $\mathcal{O}_p$ представлен парой $(f, U)$ и $h \in \mathcal{O}(X)$ — функция, существование которой утверждается леммой. Функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x)h(x), & x \in U; \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

является, очевидно, гладкой на всем $X$ и имеет тот же росток в $p$, что и $f$. $\square$

Теперь можно перейти к доказательству предложения. Пусть $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X))$. Для всякой $p \in X$ определим касательный вектор $v_p \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ так: поскольку всякий элемент $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_p$ является, по следствию 22.7, ростком какой-то функции $f \in \mathcal{O}(X)$, положим $v_p(\mathbf{f}) = D(f)(p)$. Условия (21.4) при этом выполнены с очевидностью, но надо проверить, что определение отображения $v_p$ корректно, то есть что $D(f)(p)$ действительно зависит только от ростка функции $f$ в точке $p$. Иными словами, надо убедиться, что $D(f)(p) = 0$, если $f$ тождественно равно нулю на некотором открытом множестве $U \ni p$. Это делается так: пусть $h$ — функция, существование которой утверждается леммой 22.6;

тогда $fh = 0$, и имеем $0 = D(fh) = D(f) \cdot h + f \cdot D(h)$; беря значение в точке $p$, получаем $0 = D(f)(p) \cdot h(p) = D(f)(p)$, что и утверждалось.

Стало быть, мы построили по дифференцированию $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X))$ семейство касательных векторов $\{v_p\}_{p \in X}$. Осталось убедиться, что это семейство гладко зависит от $p$; это мы сделаем в локальных координатах. Именно, пусть в локальных координатах наше семейство записывается (на некотором открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$, диффеоморфном координатной окрестности) в виде $\sum a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$; надо проверить, что функции $a_i$ гладки. Если бы «координатные функции» $x_i$ продолжались до гладких функций на всем $X$, то делать было бы совсем нечего, так как мы бы тогда имели право написать $D(x_i) = a_i \in \mathcal{O}(X)$, и функции $a_i$ оказываются автоматически гладкими. К сожалению, такое продолжение возможно не всегда (например, ничто не мешает выбрать локальные координаты так, чтобы они стремились к бесконечности на границе координатной окрестности), так что придется еще раз применить следствие 22.7. Именно, для произвольной точки $p \in U$ существуют функции $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$, продолжающиеся до гладких функций на всем $X$ и совпадающие с $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности $U_1 \ni p$. Теперь функции $D(\widetilde{x}_i)$ гладки на всем $X$, и при этом функции $a_i$ совпадают с $D(\widetilde{x}_i) \in \mathcal{O}(X)$ на множестве $U_1 \ni p$ и, стало быть, гладки на этом множестве. Раз функции $a_i$ гладки в окрестности произвольной точки $p \in U$, они гладки всюду на $U$.

Итак, мы показали, что всякое $\mathbb{R}$-дифференцирование кольца $\mathcal{O}_X$ происходит из некоторого векторного поля. Для завершения доказательства надо еще проверить, что разным векторным полям соответствуют разные дифференцирования; сделайте это самостоятельно. □

**Замечание 22.8.** Доказательство предложения 22.5 — первый случай, когда мы получили какую-то пользу от бесконечно дифференцируемых функций, не являющихся аналитическими.

Коль скоро у нас есть чисто алгебраическое определение векторных полей, с векторными полями можно производить алгебраические манипуляции. Вот важный пример.

Напомним, что *коммутатором* двух эндоморфизмов $E_1$ и $E_2$ абелевой группы $A$ называется отображение $[E_1, E_2]\colon x \mapsto E_1(E_2(x)) - E_2(E_1(x))$.

**Предложение 22.9.** *Пусть $A$ — коммутативное кольцо, $B \subset A$ — его подкольцо. Если $D_1$ и $D_2$ — дифференцирования кольца $A$ над $B$, то и их коммутатор $[D_1, D_2]$ является дифференцированием $A$ над $B$.*

Бесхитростное доказательство оставляется в качестве упражнения.

Поскольку векторные поля — частный случай дифференцирований, для двух векторных полей на многообразии можно также определить коммутатор. Давайте выясним, как он записывается в локальных координатах.

Пусть $v_1 = \sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $v_2 = \sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Посмотрим, как их коммутатор действует на функцию $f$. Сначала найдем $v_1(v_2(f))$:

$$v_1(v_2(f)) = v_1\Big(\sum b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) = \sum_i v_1(b_i)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i} + b_i\cdot v_1\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) =$$

$$= \sum_{i,k} a_k\frac{\partial b_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,k} b_i a_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}.$$

Очевидно, формула для $v_2(v_1(f))$ отличается от вышеприведенной только тем, что в ней меняются местами буквы $a$ и $b$, причем слагаемые со вторыми производными в обеих формулах совпадают (тут используется симметрия вторых частных производных!). Вычитая эти два равенства и группируя слагаемые с $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ с одинаковыми $i$, получаем:

$$v_1(v_2(f)) - v_2(v_1(f)) = \sum_i\Big(\sum_k a_k\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_k\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Стало быть, в координатах коммутатор векторных полей записывается так:

$$\Big[\sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big] = \sum_i\Big(\sum_k a_k\frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_k\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad (22.1)$$

Дифференцирования любого кольца обладают следующими важными алгебраическими свойствами:

**Предложение 22.10.** *Если $A$ — коммутативное кольцо и $B \subset A$ — подкольцо, то для всяких $D_i \in \mathrm{Der}_B(A)$ выполнены такие тождества:*

$$[D_1 \pm D_2, D_3] = [D_1, D_3] + [D_2, D_3];$$

$$[D_1, D_2] = -[D_2, D_1];$$

$$[[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2] = 0. \qquad (22.2)$$

*В частности, эти тождества выполнены, если $D_1$, $D_2$ и $D_3$ — векторные поля на многообразии.*

Доказательство, сводящееся к непосредственной проверке, оставляется в качестве очередного обязательного упражнения.

Тождество (22.2) называется *тождеством Якоби;* в совокупности тождества из предложения 22.10 показывают, что векторные поля на многообразии образуют *алгебру Ли.*