# Лекция 23. Векторные поля: геометрия

На прошлой лекции мы выяснили алгебраический смысл векторных полей; займемся геометрическим.

**Определение 23.1.** Пусть $X$ — гладкое многообразие. *Однопараметрической группой диффеоморфизмов* многообразия $X$ называется гладкое отображение $G\colon \mathbb{R} \times X \to X$, обладающее следующими свойствами:

(1) Для каждого $t \in R$ отображение $g_t\colon X \to X$, определенное по формуле $g_t(x) = G(t, x)$, является диффеоморфизмом.

(2) Для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $g_{t_1+t_2} = g_{t_1} \circ g_{t_2}$.

Иными словами, $\mathbb{R}$ (как аддитивная группа) действует на $X$ так, что преобразования являются диффеоморфизмами; условие гладкости отображения $G$ означает, что диффеоморфизм $g_t$ гладко зависит от числа $t$.

Иногда однопараметрические группы диффеоморфизмов называют *фазовыми потоками.* За этим термином стоят следующие интуитивные представления: точки «текут» по многообразию $X$ таким образом, что за время $t$ точка $p$ перетекает в $g_t p = G(t, p)$. Кривые (то есть отображения $\mathbb{R} \to X$), заданные формулой $t \mapsto g_t p$ при фиксированном $p$, в этой терминологии называются *фазовыми кривыми* (эта «кривая» может сводиться к одной точке). Грубо говоря, фазовые кривые суть орбиты действия $\mathbb{R}$ на $X$ (грубость в том, что орбитой обычно называется не отображение $\mathbb{R} \to X$, а его образ).

Фазовые потоки и векторные поля тесно связаны. Обсудим эту связь.

Начнем с того, что всякому фазовому потоку поставим в соответствие векторное поле. Именно, пусть $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Для точки $p \in X$ рассмотрим касательный вектор $v_p = f_*(d/dt) \in \mathcal{T}_p X$, где $f\colon \mathbb{R} \to X$ — фазовая кривая, проходящая через точку $p$ в момент времени 0: $f(t) = g_t p$. Иначе говоря, $v_p$ — вектор, касательный в точке $p$ к фазовой кривой, проходящей через эту точку. Соответствие $p \mapsto v_p$ и есть векторное поле, соответствующее фазовому потоку.

**Пример 23.2.** Рассмотрим однопараметрическую группу диффеоморфизмов, действующую на $\mathbb{R}$ по правилу $g_t(x) = e^t \cdot x$. Поскольку $\frac{d}{dt}(e^t \cdot x) = e^t \cdot x$ и при $t = 0$ эта производная равна $x$, векторное поле на $\mathbb{R}$, соответствующее этому фазовому потоку, имеет вид $x\frac{d}{dx}$.

**Пример 23.3.** Рассмотрим теперь на $\mathbb{R}$ векторное поле $(1+x^2)\frac{d}{dx}$ и покажем, что оно не соответствует никакому фазовому потоку. В самом деле, пусть это поле соответствует потоку $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$; рассмотрим отображение $t \mapsto f(t) = g_t(1)$ («фазовая кривая, проходящая через току 1 в момент 0»). По условию, $\frac{df}{dt} = 1 + f(t)^2$ при всех $t$; стало быть, функция $f$ строго возрастающая, откуда $\frac{dt}{df} = \frac{1}{1+f^2}$ и, стало быть, $t = \operatorname{arctg} f + C$, $f(t) = \operatorname{tg}(t - C)$, где $C$ — некоторая константа. Тем самым $\lim_{t\to C+\pi/2} f(t) = \infty$, тогда как этот предел должен быть равен числу $g_{C+\pi/2}(1)$ — противоречие!

Соответствие между фазовыми потоками и векторными полями подсказывает следующее более общее определение фазовой кривой, имеющее смысл и тогда, когда векторное поле, не соответствует никакому фазовому потоку:

**Определение 23.4.** Пусть $v$ — векторное поле на многообразии $X$ и $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал. Гладкое отображение $f\colon I \to X$ называется *фазовой кривой* векторного поля $v$, если для всякой точки $t \in I$ выполнено равенство $f_*(\frac{d}{dt}) = v(f(t))$ (здесь и далее мы будем иногда обозначать производную отображения $f$ через $f_*$).

Посмотрим, как условие «быть фазовой кривой векторного поля» записывается в координатах. Пусть в локальной карте $U \subset \mathbb{R}^n$ векторное поле записывается в виде $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Рассмотрим отображение $x\colon I \to U$, заданное формулой $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Имеем, очевидно,

$$x_*\Bigl(\frac{d}{dt}\Bigr) = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{dx_n}{dt}\frac{\partial}{\partial x_n},$$

так что кривая $x$ будет фазовой кривой векторного поля $v$ тогда и только тогда, когда $\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$ для всех $i$ (в более краткой записи: $\frac{dx}{dt} = v(x)$).

Такой набор соотношений называется *обыкновенным дифференциальным уравнением,* а фазовые кривые в этой терминологии называются решениями дифференциального уравнения.

Соответствие между векторными полями и фазовыми потоками обладает следующими хорошими свойствами:

**Предложение 23.5.** *Различным фазовым потокам соответствуют различные векторные поля.*

**Предложение 23.6.** *Всякое векторное поле на компактном многообразии (и, более общо, всякое векторное поле с компактным носителем на произвольном многообразии) соответствует некоторому (в силу предложения 23.5 однозначно определенному) фазовому потоку.*

Наконец, хотя фазовый поток, соответствующий векторному полю, может не существовать, всегда существует его локальный аналог:

**Предложение 23.7.** *Если $v$ — векторное поле на многообразии $X$ и $p \in X$, то существуют открытый интервал $I \ni 0$, окрестность $U \ni p$ и гладкое отображение $G\colon I \times U \to X$, обладающее следующими свойствами:*

*(1) Для всяких $t \in I$ и $q \in U$ имеем $v_q = f_*(d/dt)$, где отображение $f\colon I \to X$ определено по формуле $t \mapsto f(t, q)$.*

*(2) Для всякой точки $q \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $G(t_2, G(t_1, q)) = G(t_1 + t_2, q)$, как только $|t_1| < \varepsilon$ и $|t_2| < \varepsilon$.*

Отображение $G$, о котором идет речь в предложении 23.7, называется *локальным фазовым потоком.* Если $G\colon I \to U \to X$ — локальный фазовый поток, то для всякого $t \in I$ можно рассмотреть отображение $g_t\colon x \mapsto G(t, x)$ (как и в случае с «настоящим» фазовым потоком), и для достаточно малых $s$ и $t$ будет по-прежнему выполняться соотношение $g_t(g_s(x)) = g_{s+t}(x)$.

Предложения 23.5–23.7 эквивалентны так называемой *основной теореме теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Доказательство этой теоремы (и даже ее формулировку) мы опустим за недостатком времени. Желающие могут изучить это доказательство и понять, как получить предложения 23.5–23.7 из классической формулировки, самостоятельно (лучше всего — по книге В. И. Арнольда «Обыкновенные дифференциальные уравнения»).

Итак, векторное поле — это более или менее то же самое, что (локальный) фазовый поток. Теперь надо научиться проделывать известные нам операции с векторными полями — дифференцирование функции по векторному полю и коммутатор векторных полей — на языке фазовых потоков.

С дифференцированием все совсем просто:

**Предложение 23.8.** *Пусть $v$ — векторное поле на многообразии $X$, $p \in X$ и $\{g_t\}$ — локальный фазовый поток в окрестности точки $p$, соответствующий полю $v$. Тогда для всякой функции $f \in \mathcal{O}(X)$ имеем* $v(f)(p) = \left.\dfrac{d}{dt}(f(g_t(p)))\right|_{t=0}$. □

Коммутатор векторных полей более интересен. Оказывается, он измеряет, в какой степени коммутируют друг с другом соответствующие (локальные) фазовые потоки. Точная формулировка такова:

**Предложение 23.9.** *Пусть $v$ и $w$ — векторные поля на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, $\{g_t\}$ и $\{h_t\}$ — соответствующие им локальные фазовые потоки в окрестности точки $p$. Положим $z = [v, w]$, и пусть $\{f_t\}$ — локальный фазовый поток, соответствующий полю $z$. Тогда*

$$g_s h_t (g_s)^{-1} h_t^{-1}(p) = f_{st}(p) + o(s^2 + t^2) \qquad \text{при } s, t \to 0.$$

*Доказательство.* Заметим, что соответствие между фазовыми потоками и векторными полями можно записать в таком виде (подразумевается, что поток $\{g_t\}$ соответствует полю $\sum v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; мы пишем $v$ вместо $(v_1, \dots, v_n)$):

$$g_t(q) = q + tv(q) + o(t);$$

ясно, что $o$ в этой формуле можно выбрать равномерным по $q$, если считать, что $q$ содержится в некоторой окрестности точки $p$. Поэтому наше утверждение равносильно такому:

$$g_s h_t g_{-s} h_{-t}(p) = p + st\Big(\sum\nolimits_j \Big(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j\Big)\Big) + o(s^2 + t^2). \tag{23.1}$$

Положим $\varphi(s, t) = g_s h_t (g_s)^{-1} h_t^{-1}(p)$. Формула (23.1), которую нам надо доказать, — это формула Тейлора для отображения $\varphi$ в нуле. Очевидно, $\varphi(s, 0) = \varphi(0, t) = p$ при любых $s$ и $t$. Следовательно, в ряде Тейлора для $\varphi$ отсутствуют слагаемые, в которых присутствует только $s$ или только $t$. Поэтому в степени 1 в разложении $\varphi$ ничего нет, а в степени 2 присутствует только слагаемое с $st$; чтобы завершить доказательство, надо только найти один $n$-мерный вектор-коэффициент при $st$. Вместо того, чтобы в лоб считать $\partial^2\varphi/\partial s \partial t$, многократно применяя формулу для производной сложной функции, поступим так, как в таких случаях все и делают: будем подставлять ряды Тейлора один в другой, как если бы они сходились к нашим функциям. Писанины при этом будет гораздо меньше, а формулы для коэффициентов ряда Тейлора заведомо получатся верные.

При этом все слагаемые степени $\leqslant 2$ надо, естественно, выписать, а слагаемые степени $> 2$ можно отбрасывать (на разложение до второго порядка включительно они не повлияют). Специфика нашей функции $\varphi$ позволяет добиться еще одного упрощения: можно отбрасывать и все слагаемые с $s^2$ или $t^2$. В самом деле, по ходу преобразований они могут дать либо слагаемое степени, большей 2, которое мы все равно отбросим, либо слагаемые с $s^2$ или $t^2$, про которые мы знаем заранее, что в итоге они сократятся.

Имея все это в виду, приступим к выкладкам:

$$
\begin{aligned}
g_s h_t g_{-s} h_{-t}(p) &= g_s h_t g_{-s}(p - tw(p) + t^2(\dots)) = \\
&= g_s h_t(p - tw(p) - sv(p - tw) + s^2(\dots)) =
\end{aligned}
$$

(мы отбросили слагаемое с $t^2$, как и обещали)

$$
= g_s h_t\Big(p - tw(p) - s\Big(v(p) - t\sum\nolimits_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j + t^2(\dots)\Big)\Big) =
$$

(применили формулу Тейлора к $v$)

$$
\begin{aligned}
&= g_s h_t\Big(p - tw(p) - sv(p) - st\sum\nolimits_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j\Big) = \\
&= g_s\Big(p - tw(p) - sv(p) - st\sum\nolimits_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j + tw(p - tw(p) - sv(p)\Big) =
\end{aligned}
$$

(отброшено слагаемое с $st$ во внутренних скобках)

$$
\begin{aligned}
&= g_s\Big(p - tw(p) - sv(p) - st\sum\nolimits_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j + tw(p) + t\sum\nolimits_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} sv_j\Big) = \\
&= g_s\Big(p - sv(p) + st\Big(\sum\nolimits_j\Big(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j\Big)\Big)\Big) = \\
&= p + st\Big(\sum\nolimits_j\Big(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j\Big)\Big) + o(s^2 + t^2).
\end{aligned}
$$

Доказательство закончено. □

У относящегося к инфинитезимальной ситуации предложения 23.9 есть полезное глобальное следствие:

**Предложение 23.10.** *Если коммутатор векторных полей равен нулю, то соответствующие им (локальные или глобальные) фазовые потоки коммутируют.*

*Подробнее: пусть $X$ — гладкое многообразие, $v$ и $w$ — такие векторные поля на $X$, что $[v, w] = 0$. Если $\{g_t\}$ и $\{h_t\}$ — локальные или глобальные фазовые потоки, соответствующие полям $v$ и $w$, то для любых $s$ и $t$, для которых отображения $g_s$ и $h_t$ определены, выполнено равенство $g_s \circ h_t = h_t \circ g_s$.*

*Доказательство.* Поскольку для всякого натурального $N$ выполнено соотношение $(g_{s/N})^N = g_s$, достаточно показать, что коммутируют $g_{s/N}$

и $h_{t/N}$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Поэтому можно считать, что отображения $g_s$ и $h_t$ не выводят данную точку $p$ за пределы координатной окрестности и, тем самым, что $X$ — это область в $\mathbb{R}^n$.

Чтобы показать, что $g_s(h_t(p)) = h_t(g_s(p))$, зададимся целым положительным числом $n$. Из предложения 23.9 следует, что для любой точки $q$ из этой окрестности выполнено соотношение

$$\|g_{s/n}(h_{t/n}(p)) - h_{t/n}(g_{s/n}(p))\| = o(1/n^2) \qquad \text{при } n \to \infty, \tag{23.2}$$

причем $o$ равномерно по $q$. Чтобы перейти от

$$g_s h_t = \underbrace{g_{s/n} \dots g_{s/n}}_{n} \underbrace{h_{t/n} \dots h_{t/n}}_{n}(p)$$

к

$$h_t g_s = \underbrace{h_{t/n} \dots h_{t/n}}_{n} \underbrace{g_{s/n} \dots g_{s/n}}_{n}(p),$$

надо $n^2$ раз переставить $g_{s/n}$ и $h_{t/n}$. Стало быть, $\|g_s(h_t(p)) - h_t(g_s(p))\|$ оценивается сверху суммой $n^2$ слагаемых, каждое из которых есть $o(1/n^2)$ ввиду (23.2). Устремляя $n$ к бесконечности, получаем, что эта разность равна нулю, что и завершает доказательство. $\square$