Лекция 24. Дифференциальные формы: дифференцирование

Неформальное введение

Поставим себе такую задачу: как проинтегрировать гладкую функцию по многообразию таким образом, чтобы результат не зависел от выбора локальных координат. Чтобы выделить основную трудность, рассмотрим самый простой случай: пусть носитель функции f на многообразии X целиком содержится в одной координатной окрестности (а также пусть он компактен, чтобы не возникало вопросов о сходимости интеграла); тогда в локальных координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ хочется написать

$$\int_X f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{24.1}$$

Пусть теперь $(y_1, \ldots, y_n)$ — другие локальные координаты, действующие в той же окрестности. Тогда формула замены переменных показывает, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, \ldots, y_n) \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right| dy_1 \ldots dy_n, \tag{24.2}$$

что не совпадает с $\int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$. Стало быть, наивное определение (24.1) не годится, и интегрировать *функции* по многообразию не получится. Формула (24.2) подсказывает, что объекты, которые действительно можно интегрировать по многообразию, должны записываться по-разному в зависимости от выбора системы координат: при смене системы координат наша «функция» должна умножаться на якобиан функции перехода[1]; эти объекты будут называться «дифференциальными формами степени n» (где $n = \dim X$).

Далее, часто возникает необходимость интегрировать не по самому многообразию, а по его подмногообразию; объекты, которые можно интегрировать по подмногообразиям размерности k, называются «дифференциальными формами степени k».

Основа всей этой теории — дифференциальные формы степени 1. С них мы и начнем.

Формы степени 1

Определение 24.1. Пусть $x \in X$, где X — гладкое многообразие. *Кокасательным пространством к многообразию X в точке x* называется векторное пространство, двойственное к $\mathcal{T}_x X$.

[1] Знаком абсолютной величины мы в этом неформальном обсуждении пренебрежем.

Обозначение: $\mathcal{T}_x^* X$ (по общему правилу) или $\Omega^1_{X,x}$.

Элементы кокасательного пространства называются кокасательными векторами (а иногда — ковекторами).

Очевидно, $\Omega^1_{X,x}$ естественно изоморфно $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал в локальном кольце $\mathcal{O}_{X,x}$.

Пример 24.2. Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$ и $x = (a_1, \dots, a_n)$. Обозначим через $dx_i \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ класс ростка функции $x_i - a_i$ по модулю $\mathfrak{m}_x^2$. По лемме Адамара (предложение 21.6) $\langle dx_1, dx_2, \dots, dx_n \rangle$ — базис в $\Omega^1_{X,x}$. Поскольку $\frac{\partial}{(x_i - a_i)} \partial x_j = \delta_{ij}$, этот базис дуален к базису $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$ в пространстве $\mathcal{T}_x X$.

Определение 24.3. *Дифференциальной формой степени 1* (синонимы: 1-форма, пфаффова форма) на многообразии X называется отображение ω, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие кокасательный вектор $\omega_x \in \Omega^1_{X,x}$ таким образом, что ω_x гладко зависит от x.

В обозначениях примера 24.2 в каждой точке $x = (a_1, \dots, a_n) \in X$ выберем базис $\langle dx_1, dx_2, \dots, dx_n \rangle$ в пространстве $\Omega^1_{X,x}$ (то обстоятельство, что базисы в разных пространствах обозначены одинаково, ничему не помешает). Тогда всякая 1-форма на X запишется в виде

$$\omega = \sum_i f_i dx_i,$$

где f_i — функции на X; гладкая зависимость кокасательного вектора от точки означает, что функции f_i (коэффициенты в разложении по базису) гладки.

Множество дифференциальных форм на многообразии X обозначается $\Omega^1(X)$. Это векторное пространство над $\mathbb{R}$ и, кроме того, модуль над кольцом $\mathcal{O}(X)$ гладких функций на X: если f — гладкая функция на X и $\omega \in \Omega^1(X)$, то форма $f\omega$ задается по правилу $(f\omega)_x = f(x)\omega_x$. Легко показать, что $\Omega^1(x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathrm{Vect}(X), \mathcal{O}(X))$ (изоморфизм $\mathcal{O}(X)$-модулей; через $\mathrm{Vect}(X)$ обозначено множество векторных полей на X, рассматриваемое как $\mathcal{O}(X)$-модуль); для аккуратного доказательства надо поиграть с функциями типа «ступенька», как в доказательстве предложения 22.5.

Важный источник построения 1-форм — операция дифференцирования функций:

Определение 24.4. Пусть f — гладкая функция на многообразии X. Ее *дифференциалом* называется 1-форма df, определенная следующим образом: для всякого $x \in X$ линейный функционал $(df)_x \in \mathcal{T}_x X$ действует по правилу $v \mapsto v(f)$, если рассматривать касательные векторы как дифференцирования из $\mathcal{O}_{X,x}$ в $\mathbb{R}$ (обозначение 21.5).

Пример 24.5. В примере 24.2 коэффициент кокасательного вектора $(df)_x$ при dx_i в базисе $\langle dx_1, dx_2, \dots, dx_n\rangle$ равен результату действия $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на f в точке x, то есть $(\partial f/\partial x_i)(x)$. Следовательно, имеет место равенство

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{24.3}$$

Из этого равенства, в свою очередь, видно что форма dx_i является дифференциалом координатной функции x_i, и тем самым запись $\omega = \sum f_i dx_i$ не является двусмысленной.

Для дифференциалов функций верен такой аналог формулы Лейбница:

Предложение 24.6. *Если $f, g \in \mathcal{O}(X)$, то $d(fg) = fdg + gdf$.*

Доказательство. Это тавтология: если дифференцирование v лежит в $\mathcal{T}_x X$, то

$$d(fg)_x(v) = v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f) = (fdg + gdf)_x(v).$$

Можно также, не мудрствуя лукаво, провести вычисление в локальных координатах. ☐

Замечание 24.7. Дифференциальные можно, подобно векторным полям, определить чисто алгебраически. Именно, можно показать, что $\Omega^1(X)$ изоморфен, как $\mathcal{O}(X)$-модуль, модулю с образующими df для всевозможных $f \in \mathcal{O}(X)$ и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} df &= 0, && \text{если } f \text{ — константа;} \\ d(fg) &= fdg + gdf && \text{для всяких } f, g \in \mathcal{O}(X). \end{aligned}$$

Мы не будем ни доказывать этот факт, ни пользоваться им, но полезно иметь его в виду.

Определение 24.8. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение и ω — форма степени 1 на Y. Тогда ее *обратным образом* при отображении φ называется 1-форма $\varphi^*\omega \in \Omega^1(Y)$, определенная по формуле

$$(\varphi^*\omega)_x(v) = \omega_{\varphi(x)}(f_* v),$$

где через $\varphi_*\colon \mathcal{T}_x X \to \mathcal{T}_{f(x)} Y$ обозначена, как обычно, производная отображения φ в точке x.

Основное свойство обратного образа — это то, что он коммутирует со взятием дифференциала:

Предложение 24.9. *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение и f — гладкая функция на Y. Тогда $d(f \circ \varphi) = \varphi^*(df)$.*

Доказательство. Это тоже тавтология: если $v \in \mathcal{T}_x X$, то

$$d(f \circ \varphi)_x(v) = v(f \circ \varphi) = \varphi_* v(f) = (df)_{f(x)}(\varphi_* v) = \varphi^*(df)(v).$$

☐

Немного линейной алгебры

В этом разделе мы напомним в удобной для нас форме некоторые факты из линейной алгебры.

Пусть V — векторное пространство над полем k. Полилинейное отображение $\omega\colon V^m \to k$ называется *кососимметрическим,* если $\omega(v_1, \dots, v_m) = 0$, как только $v_i = v_j$ для каких-то $i \neq j$. Если $\operatorname{char} k \neq 2$, это условие эквивалентно тому, что ω меняет знак при перестановке любых двух аргументов.

Пространство кососимметричных полилинейных отображений из V^k в k обозначается $\wedge^k V^*$ (поскольку оно канонически изоморфно k-ой внешней степени пространства V^*).

Начиная с этого момента будем считать, что $\operatorname{char} k = 0$.

Определение 24.10. Пусть $F\colon V^{\otimes l} \to k$ — полилинейное отображение. Его *альтернированием* называется полилинейное отображение $\operatorname{Alt} F\colon V^{\otimes l} \to k$, действующее по формуле

$$(v_1, \dots, v_l) \mapsto \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} \operatorname{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)}).$$

Очевидно, что полилинейное отображение $\operatorname{Alt} F$ всегда кососимметрично и что $\operatorname{Alt} F = F$ тогда и только тогда, когда F кососимметрично.

Определение 24.11. Пусть $\lambda \in \wedge^l V^*$, $\mu \in \wedge^m V^*$. *Внешним произведением* λ и μ называется кососимметричное отображение $\lambda \wedge \mu = \frac{(l+m)!}{l!m!} \operatorname{Alt} F \in \wedge^{k+l} V^*$, где полилинейное отображение F действует по правилу

$$(v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{l+m}) \mapsto \lambda(v_1, \dots, v_l)\mu(v_{l+1}, \dots, v_{l+m}).$$

В дальнейшем мы будем использовать такое соглашение: если $\omega \in \wedge^l V^*$, будем писать, что $\deg \omega = l$.

Предложение 24.12. *Внешнее произведение обладает следующими свойствами:*

Ассоциативность: $(\omega \wedge \lambda) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda \wedge \eta)$.

Суперкоммутативность: $\omega \wedge \eta = (-1)^{\deg \omega \deg \eta} \eta \wedge \omega$.

Доказательство этого предложения мы опустим; отметим только, что коэффициент перед $\operatorname{Alt} F$ в определении внешнего произведения нужен для ассоциативности.

Пусть $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ — базис пространства V, и пусть $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ — дуальный базис пространства V^*. Каждое m-элементное подмножества $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ можно единственным образом записать в виде $S = \{i_1, \dots, i_m\}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$. Положим

$e_S = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \in \wedge^m V^*$. Тогда всевозможные e_S, где S пробегает все m-элементные подмножества в $\{1, 2, \dots, n\}$, образуют базис пространства $\wedge^m V^*$.

Если $S = \{i_1, \dots, i_m\}$, $T = \{j_1, \dots, j_l\}$, то

$$e_S \wedge e_T = \begin{cases} 0, & \text{если } S \cap T \neq \varnothing; \\ \pm e_{S \cup T}, & \text{если } S \cap T = \varnothing. \end{cases} \tag{24.4}$$

При этом во втором случае знак «плюс» или «минус» выбирается в зависимости от того, четна или нечетна перестановка, расставляющая числа $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_l$ в порядке возрастания.

Формы произвольной степени

Определение 24.13. *Дифференциальной формой степени* k (синоним: k-форма) на многообразии X называется отображение ω, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие кососимметричное полилинейное отображение $\omega_x \in \wedge^k \mathcal{T}^*_{X,x}$ таким образом, что ω_x гладко зависит от x.

Множество k-форм на многообразии X обозначается $\Omega^k(X)$. так же, как и $\Omega^1(X)$, оно является $\mathcal{O}(X)$-модулем. Ясно, что $\Omega^k(X) = 0$ при $k > \dim X$. Мы иногда будем писать $\Omega^0(X)$ вместо $\mathcal{O}(X)$.

В локальных координатах (или, если угодно, в условиях примера 24.2) k-форма записывается как

$$\omega = \sum_S f_S dx_S,$$

где S пробегает все k-элементные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, и где $dx_S = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, если $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ и $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Дифференциальные формы можно перемножать так же, как и кососимметрические полилинейные формы:

Определение 24.14. Пусть $\omega \in \Omega^k(X)$, $\eta \in \Omega^l(X)$. Тогда *внешним произведением* этих дифференциальных форм называется форма $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(X)$, определенная по правилу

$$(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x.$$

Умножение функции на форму мы также будем считать внешним произведением (из $\Omega^0(X) \times \Omega^k(X)$ в $\Omega^k(X)$.

Для форм произвольной степени можно очевидным образом определить обратный образ, аналогичный обратному образу 1-форм:

Определение 24.15. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда *обратным образом формы ω при отображении φ* называется k-форма $\varphi^*\omega \in \Omega^k(Y)$, определенная по формуле

$$(\varphi^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{\varphi(x)}(f_* v_1, \ldots, f_* v_k).$$

где через $\varphi_*\colon \mathcal{T}_x X \to \mathcal{T}_{f(x)} Y$ обозначена, как обычно, производная отображения φ в точке x.

Следующее утверждение очевидно (и относится к линейной алгебре):

Предложение 24.16. *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение, ω и η — дифференциальные формы на X. Тогда $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$.*

Наша ближайшая цель — определить для всех k отображения $d^k\colon \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$, обобщающие известное нам отображение $d\colon \mathcal{O}(X) = \Omega^0(X) \to \Omega^1(X)$.

Предложение 24.17. *Для всякого многообразия X и всякого целого неотрицательного числа k можно единственным образом определить набор $\mathbb{R}$-линейных отображений $d_X^k : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$, обладающих следующими свойствами*

Нормировка: *$d_X^0(f) = df$ для всех $f \in \mathcal{O}(X) = \Omega^0(X)$.*

Естественность: *если $\varphi\colon X \to Y$ — гладкое отображение, то $\varphi^*(d_Y^k\omega) = d_X^k(f^*\omega)$.*

Тождество Лейбница: *$d_X^k(\omega \wedge \eta) = d_X^k(\omega) \wedge \eta + (-1)\deg\omega\omega \wedge d_X^k\eta$.*

Нулевой квадрат: *$d_X^{k+1} \circ d_X^k = 0$.*

Замечание 24.18. Существующие в силу предложения 24.17 отображения d_X^k называются *операторами внешнего дифференцирования;* На практике при записи операторов внешнего дифференцирования опускается как нижний индекс X (всегда), так и верхний индекс k (почти всегда). Мы тоже не будем отступать от этой традиции.

Доказательство. Начнем с единственности. Пусть операторы внешнего дифференцирования (для всех степеней и всех многообразий) построены. Из свойства естественности, примененного к вложению $i\colon U \to X$, где U — открытое подмножество, получаем, что $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$. Стало быть, внешний дифференциал всякой формы $\omega \in \Omega^k(X)$ однозначно определяется дифференциалами ограничений формы на все координатные окрестности; остается показать, что эти ограничения также определены однозначно. Поскольку, опять же ввиду свойства естественности, взятие внешнего дифференциала коммутирует с обратным образом относительно диффеоморфизма, являющегося локальной картой, достаточно показать, что внешний дифференциал однозначно определен на многообразиях, являющихся открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$. Для этого воспользуемся таким фактом:

Лемма 24.19. *Если операторы внешнего дифференцирования построены, то для всяких $f, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{O}(X)$ имеет место равенство*

$$d(f dg_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k.$$

Доказательство леммы. Из тождества Лейбница и свойства нулевого квадрата индукцией по k легко выводится, что $d(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = 0$. После этого утверждение леммы немедленно следует из тождества Лейбница (не забудьте, что функция — это 0-форма). □

Теперь заметим, что всякая k-форма на области в $\mathbb{R}^n$ представляется в виде суммы конечного числа слагаемых вида $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$; по лемме и свойству нормировки внешний дифференциал такого слагаемого равен $df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, где df понимается в смысле определения 24.4. Это выражение определено однозначно, что и завершает доказательство единственности.

Теперь докажем существование. Для этого сначала определим дифференциалы форм на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$ способом, немедленно приходящим в голову после нашего доказательства единственности. Именно, поскольку в области $U \subset \mathbb{R}^n$ всякая k-форма однозначно представляется в виде суммы слагаемых вида $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, достаточно определить дифференциалы для этих слагаемых по формуле из леммы 24.19:

$$d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Поскольку с обратным образом коммутируют и внешнее произведение форм (предложение 24.16), и дифференциал функции (предложение 24.9), так определенный дифференциал форм на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством естественности по отношению к гладким отображениям (в частности, диффеоморфизмам и открытым вложениям) таких множеств. Теперь дифференциал произвольной формы $\omega \in \Omega^k(X)$ определим так: возьмем покрытие $X = \bigcup V_i$, где для каждого V_i существует диффеоморфизм $\varphi_i \colon U_i \to V_i$ ($U_i \subset \mathbb{R}^n$ открыто, где $n = \dim X$). Положим $\eta_i = (\varphi^{-1})^*(d(\varphi^*(\omega|_{U_i}))$; из свойства естественности для отображений открытых подмножеств немедленно следует, что $\eta_i|_{U_i \cap U_j} = \eta_j|_{U_i \cap U_j}$ для любых i и j, так что все η_i склеиваются в одну форму $\eta \in \Omega^{k+1}(X)$, причем эта η не зависит от выбора покрытия и локальных карт. Положим $d\omega = \eta$.

Теперь проверим, что полученное отображение (точнее, отображения) d обладают всеми требуемыми свойствами.

Свойство нормировки очевидно.

Для доказательства свойства естественности достаточно проверить, что равенство $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ будет верно после ограничения на все открытые множества некоторого покрытия, но для этого случая оно легко следует из естественности относительно отображений открытых подмножеств в евклидовых пространствах.

Осталось проверить тождество Лейбница и тождество $d^2 = 0$. И то, и другое достаточно проверить в локальных координатах. Начнем с тождества Лейбница. Очевидно, достаточно проверить его для случая $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $\eta = g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$. Тогда

$$\omega \wedge \eta = fg dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} = \\ &= f dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} + \\ &\quad + g df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно в точности $d\omega \wedge \eta$, а первое получится из $\omega \wedge d\eta$, если перетащить 1-форму dg влево через k внешних сомножителей $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_k}$; в силу суперкоммутативности внешнего умножения форма $\omega \wedge d\eta$ умножится при этом на $(-1)^k$, откуда все и следует.

Тождество $d(d\omega) = 0$ также достаточно проверить для форм вида $f dx_S$, где $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ и $i_1 < \cdots < i_k$. Для всякого натурального $j \in [1; n]$ положим $\varepsilon(j, S) = 0$, если $j \in S$, и $(-1)^\nu$ в противном случае, где ν — число элементов множества S, оказавшихся левее j при расстановке множества $S \cup \{j\}$ в порядке возрастания. Вооружившись этими обозначениями, посчитаем:

$$\begin{aligned} d(d(f dx_S)) &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(j, S) d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_{S \cup \{j\}}\Big) = \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \varepsilon(j, S)\varepsilon(k, S \cup \{j\}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_{S \cup \{j,k\}}. \end{aligned}$$

В сумме в правой части каждое ненулевое слагаемое с $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_{S \cup \{j,k\}}$ встречается дважды: один раз оно появляется при добавлении k в множество $S \cup \{j\}$, а другой — при добавлении j в множество $S \cup \{k\}$. Поскольку, очевидно, $\varepsilon(j, S)\varepsilon(k, S \cup \{j\}) = -\varepsilon(k, S)\varepsilon(j, S \cup \{k\})$, эти слагаемые сокращаются, что и завершает доказательство. $\square$