Лекция 25. Дифференциальные формы: интегрирование

Сейчас мы введем те «k-мерные объекты», по которым можно интегрировать дифференциальные формы степени k.

Определение 25.1. Пусть X — гладкое многообразие. *k-мерной поверхностью в X* называется пара (U, φ), где $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое подмножество и $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение.

Замечание 25.2. Геометрически наша k-мерная поверхность (точнее, ее образ при отображении φ) не обязана быть гладким подмногообразием в X (простой пример: $X = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (t^2, t^3)$).

Определение 25.3. Пусть (U, φ) — k-мерная поверхность в многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда *интегралом* от формы ω по этой области называется число $\int_U f\, dy_1 \dots dy_k$, где $\varphi^*\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$.

На первый взгляд кажется, что так определенный таким образом интеграл зависит от выбора системы координат в $\mathbb{R}^k$ и, более общо, не только от подмножества $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, но и от выбора параметризации φ. Следующее предложение показывает, что эта зависимость очень слаба:

Предложение 25.4. *Пусть (U, φ) — k-мерная область в многообразии X и пусть $\psi\colon V \to U$ — диффеоморфизм* со всюду положительным якобианом, *где $V \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Тогда для всякой формы $\omega \in \Omega^k(X)$ интегралы от нее по k-мерным поверхностям (U, φ) и $(V, \varphi \circ \psi)$ совпадают.*

Доказательство. Пусть $\varphi^*\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$. Тогда $(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega) = (f \circ \psi) \cdot J(\psi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$, где через ψ обозначен якобиан отображения ψ. Нам нужно проверить, что $\int_U f\, dy_1 \dots dy_k = \int_V (f \circ \psi) \cdot J(\psi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$; поскольку, по условию, $J(\psi) > 0$ всюду на V, это равенство немедленно следует из теоремы о замене переменной в интеграле. □

Итак, что же мы доказали? Если бы не оговорка о положительности якобиана в предложении 25.4, все было бы совсем хорошо: интеграл по k-мерной поверхности (U, φ) зависел бы фактически только от множества $\varphi(U)$, а не от параметризации, и мы имели бы право сказать, что «k-мерные поверхности», по которым мы интегрируем, — геомтерические объекты. В реальности все почти так и происходит, только мы отождествляем не все возможные гладкие параметризации данного подмножества в X, а только те, которые отличаются на диффеоморфизм с положительным якобианом. Про

такие диффеоморфизмы говорят, что они *сохраняют ориентацию;* стало быть, объекты, по которым мы интегрируем формы степени k — это не просто подмножества, являющиеся образами открытых подмножеств в $\mathbb{R}^k$; на этих подмножествах в X *задана ориентация.* Например, «одномерные поверхности» в смысле нашего определения имеет смысл называть ориентированными кривыми; интеграл от 1-формы по кривой не зависит от того, с какой скоростью (и равномерно или нет) точка бежит по кривой, но зависит от направления движения. Если же мы проведем замену параметра с отрицательным якобианом («обратим ориентацию»), то интеграл, как легко понять, сменит знак на противоположный.

Все сказанное дает основания надеяться, что определение 25.3 разумно. Однако же если определение хорошее, то с его помощью должны формулироваться интересные теоремы. Оказывается, что наше определение такую проверку выдерживает. Именно, справедлив следующий факт:

Утверждение 25.5 (теорема Стокса: предварительная форма). *Пусть V — k-мерная поверхность в многообразии X, и пусть ∂V — граница этой k-мерной области. Тогда для всякой $\omega \in \Omega^{k-1}(X)$ имеет место равенство*

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega.$$

Назвать это утверждение теоремой нельзя, поскольку у нас нет определения границы k-мерной поверхности. При попытке дать этому понятию точное определение возникают трудности. Видимо, невозможно дать общее определение границы k-мерной поверхности в смысле определения 25.1 так, чтобы эта граница оказалась $k-1$-мерной поверхностью. Впрочем, никто к этому и не стремится: упомянутая трудность не преодолевается, но обходится. Именно, наивное определение 25.1 модифицируется таким образом, чтобы у объекта, по которому интегрируются k-формы, было удобно определить край. Таких уточнений понятия k-мерной поверхности в многообразии известно по крайней мере два. Одно из них называется «гладкая сингулярная цепь», а другое — «ориентированное многообразие с краем». Соответственно, получаются две теории интегрирования дифференциальных форм, для каждой из которых верно утверждение 25.5. Более того, что вторая из этих теорий сводится к первой. Мы рассмотрим обе теории. Начнем с сингулярных цепей.

Соглашение 25.6. Пусть M — произвольное подмножество в $\mathbb{R}^k$ и X — гладкое многообразие. Будем говорить, что отображение $\varphi\colon M \to X$ является гладким, если его можно продолжить на какое-то открытое множество $U \supset M$ так, чтобы продолженное отображение было гладким в обычном смысле.

Определение 25.7. *Стандартным k-мерным симплексом* называется подмножетсво $\Delta_k \subset \mathbb{R}^n$, являющееся выпуклой оболочкой точек $e_0, e_1, \ldots, e_k$, где e_0 — начало координат, а e_i при $1 \leqslant i \leqslant k$ — точка, у которой i-ая координата равна единице, а остальные — нулю.

Определение 25.8. Пусть X — гладкое многообразие. *Гладким сингулярным k-мерным симплексом в X* называется гладкое (в смысле соглашения 25.6) отображение $\sigma\colon \Delta_k \to X$.

Замечание 25.9. Если заменить в этом определении слово «гладкое» на непрерывное», то получится определние сингулярного симплекса, имеющее смысл для любых топологических пространств. Негладкие сингулярные симплексы также активно используются, но не для интегрирования, а для построения теории гомологий. Часто мы будем называть гладкие сингулярные симплексы просто сингулярными симплексами.

Определение 25.10. Пусть σ — (гладкий) k-мерный сингулярный симплекс на многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. *Интегралом формы ω по симплексу σ* называется интеграл формы ω по k-мерной поверхности $(\mathrm{Int}(\Delta_k), \sigma|_{\mathrm{Int}(\Delta_k)})$ в смысле определения 25.3. Обозначение: $\int_\sigma \omega$.

Заметим, что интеграл формы по симплексу всегда существует, так как функция f, определенная равенством $\sigma^*\omega = f dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$, непрерывно продолжается на компактное множество Δ_n и тем самым ограничена.

Сингулярные симплексы — это что-то вроде «криволинейных треугольников» (тетраэдров и т. д.) в многообразии. Мы определили интегралы по этим криволинейным треугольникам; чтобы ингегрировать по более сложным фигурам, надо их разбить на сингулярные симплексы. Это разбиение формализуется в следующих определениях.

Определение 25.11. *k-мерной сингулярной цепью* на многообразии X называется формальная (конечная) линейная комбинация k-мерных сингулярных симплексов с целыми коэффициентами.

Определение 25.12. Пусть $\sigma = \sum_i \sigma_i$ — k-мерная сингулярная цепь на многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. *Интегралом* формы ω по цепи σ называется число $\int_\sigma \omega = \sum_i n_i \int_{\sigma_i} \omega$.

Мы ввели синггулярные цепи ради того, чтобы было удобно определять их границы. Вот как это делается.

Определение 25.13. Пусть σ — k-мерный сингулярный симплекс на многообразии X, и пусть $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. *$i$-ой гранью* сингулярного симплекса σ называется $k-1$-мерный сингулярный симплекс $\partial_i(\sigma) = \sigma \circ \tau_i\colon \Delta_{k-1} to \mathbb{R}^n$,

где отображение $\tau_i\colon \Delta_{k-1} \to \Delta$ есть аффинное отображение, переводящее $e_0(\Delta_{k-1})$ в $e_0(\Delta_k)$, ... , $e_{i-1}(\Delta_{k-1})$ в $e_{i-1}(\Delta_k)$, $e_i(\Delta_{k-1})$ в $e_{i+1}(\Delta_k)$, ... , $e_{k-1}(\Delta_{k-1})$ в $e_k(\Delta_k)$.

Определение 25.14. *Границей* k-мерного сингулярного симплекса σ называется $k-1$ мерная сингуларная цепь

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \partial_i \sigma.$$

Границей k-мерной сингулярной цепи $\sigma = \sum n_i\sigma_i$ называется $k-1$ мерная сингуларная цепь

$$\partial\sigma = \sum n_i \partial\sigma_i.$$

К этому определению необходим комментарий. Несомненно, граница k-мерного симплекса сложена из его граней; вопрос в том, почему этим граням приписываются именно такие знаки. Объяснение тут следующее. С точки зрения интегрирования форм, сингулярные симплексы суть подмножества (определенного вида) в X, снабженные ориентацией. При этом, чтобы задать ту или иную ориентацию симплекса, надо выбрать какой-то порядок перечисления его вершин. С точки зрения наших определений это выглядит так. Если s — перестановка множества $\{0, 1, \ldots, k\}$, то сингулярному симплексу σ можно поставить в соответствие симплекс $\sigma \circ f_s$, где $f_s\colon \Delta_k \to \Delta_k$ — аффинный автоморфизм стандартного симплекса, задающийся перестановкой s. Если перестановка s четна, то предложение 25.4 показывает, что $\int \sigma \circ f_s\omega = \int_\sigma \omega$ для всякой $\omega \in \Omega^k(X)$; если же s — нечетная перестановка, то якобиан преобразования f_s равен -1, и для всякой k-формы ω имеем

$$\int \sigma \circ f_s\omega = -\int_\sigma \omega = \int_{-\sigma} \omega$$

(см. определение 25.12). Стало быть, ориентация симплекса — это просто порядок нумерации его вершин, причем порядки, отличающиеся на четную перестановку, не различаются.

Границу симплекса также необходимо снабдить ориентацией, разумным образом согласованной с ориентацией самого симплекса. Эти согласованные ориентации выбираются следующим образом: на грани номер i (выпуклая оболочка всех вершин, кроме i-ой — см. определение 25.13) выбирается такая нумерация вершин, чтобы нумерация вершин всего симплекса в порядке «сначала i-ая вершина, затем вершины i-ой грани в выбранном порядке» определяла исходную ориентацию симплекса. Нетрудно понять, что опредлние 25.14 соответствует этому словесному описанию.

Читателю рекомендуется самостоятельно сделать чертежи для случаев $k = 2$ и 3. В первом случае он увидит, что ориентация границы треугольника по определнию 25.14 задает ее обход в одном направлении (против часовой стрелки, если ориентация самого треугольника задается обходом его вершин в направлении против часовой стрелки). Во втором случае грани тетраэдра окажутся ориентированными таким образом, что при взгляде изнутри тетраэдра направление обхода вершин всех граней будет одинаковым (либо все по часовой стрелке, либо все против часовой).

Еще одно оправдание выбора знаков для границы симплекса содержится в следующем предложении. Его неформальный смысл таков. Если знаки для граней, составляющих границу симплекса, выбраны разумно, то эта граница должна составлять «единое целое» и у нее границы быть уже не должно. Так оно и происходит:

Предложение 25.15. *$\partial(\partial\sigma) = 0$ для любой сингулярной цепи σ.*

Доказательство. Достаточно доказывать для случая, когда σ — сингулярный симплекс. Заметим, что $\partial(\partial\sigma)$ является суммой (с какими-то коэффициентами) «граней коразмерности два» (граней граней) симплекса σ. При этом легко понять, что грань коразмерности 2, полученная удалением вершин с номерами i и j, где $i < j$, встречается в этой сумме ровно два раза: первый раз как слагаемое в $\partial_i(\partial_j\sigma)$, и второй раз — как слагаемое в $\partial_j(\partial_i\sigma)$. Ясно, что в первом случае перед ней стоит коэффициент $(-1)^{i+j}$, а во втором $(-1)^{i+j-1}$. Стало быть, все слагаемые в $\partial(\partial\sigma)$ сокращаются, что и требовалось. □

Теперь мы можем сформулировать теорему, уточняющую неформальное утверждение 25.5.

Теорема 25.16 (теорема Стокса, первый вариант). *Пусть σ — сингулярная k-цепь на многообразии X и $\omega \in \Omega^{k-1}(X)$. Тогда $\int_{\partial\sigma}\omega = \int_\sigma d\omega$.*

Доказательство. Из определений интеграла по цепи и границы цепи ясно, что достаточно доказать теорему для случая, когда $\sigma\colon \Delta_k \to X$ — сингулярный симплекс. При этом, поскольку внешнее дифференцирование коммутирует со взятием обратного образа, можно считать, что ω — дифференциальная форма на окрестности стандартного симплекса $\Delta_k \subset \mathbb{R}^k$. Еще раз пользуясь линейностью, получаем, что можно считать, что $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$, где $1 \leqslant i \leqslant k$ (шляпка над сомножителем означает, что он опущен). Тогда $d\omega = (-1)^{i-1}\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, и правая часть равенства, которое мы должны доказать, имеет вид

$$(-1)^{i-1}\int_{\Delta_k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_1 \dots dx_k.$$

Однако же ограничение формы $dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k$ на каждую грань симплекса Δ_k, кроме ∂_0 и ∂_i, равно нулю, так что левая часть доказываемой формулы равна

$$\int_{\partial_0 \Delta_k} \omega + (-1)^i \int_{\partial_i \Delta_k} \omega. \tag{25.1}$$

Второе слагаемое в (25.1) равно просто

$$(-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0, y_i, \ldots, y_{k-1})\, dy_1 \ldots dy_{k-1},$$

а первое слагаемое мы вычислим непосредственно по определению. Именно, аффинное отображение из Δ_{k-1} в $\partial_0 \Delta_k$, сохраняющее порядок вершин, имеет вид

$$\psi \colon (y_1, \ldots, y_{k-1}) \mapsto (1 - y_1 - \cdots - y_{k-1}, y_1, \ldots, y_{k-1});$$

стало быть, $\psi^* \omega = (-1)^{i-1} f(1 - y_1 - \cdots - y_{k-1}, y_1, \ldots, y_{k-1}) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{k-1}$, так что первое слагаемое в (25.1) равно

$$(-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(1 - y_1 - \cdots - y_{k-1}, y_1, \ldots, y_{k-1})\, dy_1 \ldots dy_k.$$

Сделаем в этом интеграле замену $y_1 = z_2$, $y_2 = z_3$, $\ldots$, $y_{i-1} = 1 - z_1 - \cdots - z_{k-1}$, $y_i = z_i$, $\ldots$, $y_{k-1} = z_{k-1}$. Эта замена переводит симплекс Δ_{k-1} в себя, а абсолютная величина ее якобиана равна 1, так что первое слагаемое в (25.1) равно

$$(-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(z_1, \ldots, z_{i-1}, 1 - z_1 - \cdots - z_{k-1}, z_i, \ldots, z_k)\, dz_1 \ldots dz_k.$$

Стало быть, все сводится к доказательству такого равенства:

$$\begin{aligned}(-1)^{i-1} \int_{\Delta_k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_1 \ldots dx_k = \\ (-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(z_1, \ldots, z_{i-1}, 1 - z_1 - \cdots - z_{k-1}, z_i, \ldots, z_k)\, dz_1 \ldots dz_k + \\ + (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0, y_i, \ldots, y_{k-1})\, dy_1 \ldots dy_{k-1}.\end{aligned}$$

Если умножить обе части этого равенства на $(-1)^i$, то оно станет очевидно как прямое следствие правила сведения кратного интеграла к повторному (сначала интегрируем по dy_i, причем этот интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница). $\square$