Лекция 26. Интегрирование по многообразиям

Как мы и обещали, на этой лекции будет постороена вторая теория интегрирования дифференциальных форм. На сей раз мы будем интегрировать формы по «ориентированным многообразиям с краем». Начнем, естественно, с определний.

Определение 26.1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Ориентацией* пространства V называется класс эквивалентности его базисов относительно следующего отношения: два базиса считаются эквивалентными (*одинаково ориентированными*), если матрица перехода между ними имеет положительный определитель. Векторное пространство, на котором выбрана ориентация, называется *ориентированным.*

Ясно, что у векторного пространства имеются ровно две ориентации. Если $f\colon V_1 \to V_2$ — изоморфизм векторных пространств, причем V_1 ориентировано, то изоморфизм f индуцирует ориентацию на V_2 (образ «положительно ориентированного» базиса в V_1 объявляется положительно ориентированным базисом в V_2).

Неформальное определение 26.2. Пусть X — гладкое многообразие. *Ориентация многообразия* X — это выбор ориентации в касательном пространстве $\mathcal{T}_x$ для каждой точки $x \in X$; при этом требуется, чтобы ориентация в $\mathcal{T}_x$ непрерывно зависела от x.

Пример 26.3. Пусть $X = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (единичная сфера). Зададим на ней ориентацию следующим образом. Для начала зафиксируем какую-нибудь ориентацию в $\mathbb{R}^{n+1}$; для каждой точки $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ пусть $e_x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{T}_x\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ (изоморфизм естественный). (Иными словами, e_x — единичный вектор, перпендикулярный сфере в точке x и направленный «наружу».) Будем считать, что базис $(v_1, \dots, v_n)$ в $\mathcal{T}_xS^n \subset \mathcal{T}_x\mathbb{R}^{n+1}$ положительно ориентирован, если базис $(e_x, v_1, \dots, v_n)$ в $\mathcal{T}_x\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ положительно ориентирован относительно выбранной нами ориентации в $\mathbb{R}^{n+1}$. Ясно, что при любом разумном уточнении определения 26.2 полученное семейство ориентаций касательных пространств к сфере непрерывно зависит от точки.

«Антиподальное отображение» ι, переводящее точку сферы в диаметрально противоположную, сохраняет эту ориентацию при нечетных n и обращает ее при четных n. В самом деле, $\iota_*(e_x) = e_{\iota(x)}$, так что если $(v_1, \dots, v_n)$ — базис в $\mathcal{T}_xX$, то базис $(\iota_*(v_1), \dots, \iota_*(v_n))$ ориентирован так же, как базис $(v_1, \dots, v_n)$, тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto -x$, действующее из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняет ориентацию.

Замечание 26.4. Ориентации на многообразии может и не существовать!

Теперь дадим формальное определение.

Определение 26.5. Пусть X — связное гладкое n-мерное многообразие. *Ориентирующим накрытием* многообразия X называется многообразие $\tilde{X}$ вместе с отображением $\pi\colon \tilde{X} \to X$, определенное следующим образом:

$\tilde{X}$ как множество. $\tilde{X}$ представляет собой множество пар (x, ε), где $x \in X$ и ε — одна из двух возможных ориентаций векторного пространства $\mathcal{T}_x X$; отображение π переводит пару (x, ε) в точку $x \in X$.

Локальные карты. Пусть $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ — локальная карта многообразия X. Выберем какую-нибудь ориентацию ε в $\mathbb{R}^n$ и рассмотрим множество пар $(x, \varepsilon_x) \in \tilde{X}$, для которых $x \in U$ и ориентация ε_x в $\mathcal{T}_x$ индуцирована (с помощью отобоажения $(\varphi^{-1})_*$) из ориентации ε в R^n. Обозначим полученное множество через $(U, \varepsilon) \subset \tilde{X}$. Объявим всевозможные множества (U, ε) координатными окрестностями в $\tilde{X}$, а отображения $\varphi \circ \pi\colon (U, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ — локальными картами.

Топология. Подмножество в $\tilde{X}$ объявим открытым, если открыты в $\mathbb{R}^n$ все его пересечения с координатными окрестностями (точнее, образы этих пересечений относительно локальных карт).

Из определения очевидно, что $\tilde{X}$ является гладким многообразием, и что отображение $\pi\colon \tilde{X} \to X$ является (двулистным) накрытием.

Определение 26.6. *Ориентацией* многообразия X называется сечение ориентирующего накрытия $\pi\colon \tilde{X} \to X$ (иными словами, ориентация — это гладкое отображение $s\colon X \to \tilde{X}$, удовлетворяющее условию $\pi(s(x)) = x$ для всех $x \in X$).

Как известно, для всякого двулистного накрытия $\tilde{X} \to X$, где X связно, имеются две возможности: либо $\tilde{X}$ связно, и в этом случае сечения у накрытия нет, либо $\tilde{X}$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфно (а в нашем случае и диффеоморфно) отображается на X, и в этом случае сечений ровно два. Стало быть, либо ориентации у связного многообразия вообще не существует, либо этих ориентаций ровно две штуки.

Определение 26.7. Многообразие называется *ориентируемым,* если оно допускает ориентацию. *Ориентированным многообразием* называется пара из ориентируемого многообразия и его ориентации.

Ориентацию многообразия можно определить и менее ученым образом.

Предложение 26.8. *Связное многообразие X ориентируемо тогда и только тогда, когда его можно покрыть таким семейством координатных окрестностей, что все функции перехода имеют подожительный якобиан.*

Доказательство. Пусть (U_1, ε_1) и (U_2, ε_2) — координатные окрестности в $\tilde{X}$, определенные как в 26.5. Если эти окрестности имеют непустое пересечение, то определяющая их ориентация в $\mathbb{R}^n$ одна и та же, так что функция перехода между этим окрестностями имеет положительный якобиан. Следовательно, $\tilde{X}$ (и, стало быть, любая из его связных компонент, если $\tilde{X}$ несвязно) всегда обладает системой координатных окрестностей с «сохраняющими ориентацию» (т. е. имеющими положительный якобиан) функциями перехода. Если многообразие X ориентируемо, то то его ориентация (т. е. сечение ориентирующего накрытия) $s\colon X \to \tilde{X}$ задает диффеоморфизм X с одной из компонент $\tilde{X}$, так что X также обладает требуемой системой координатных окрестностей. Этим доказана часть «только тогда».

Пусть, напротив, многообразие X покрыто семейстом локальных карт $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ с сохраняющими ориентацию функциями перехода. Выберем какую-нибудь ориентацию на $\mathbb{R}^n$ и перенесем ее с помощью всевозможных $(\varphi^{-1})_*$ на каждую из координатных окрестностей $U \subset X$. Поскольку якобианы функций перехода положительны, ориентация каждого касательного пространства $\mathcal{T}_x X$ не зависит от того, с помощью какой из содержащих x координатных окрестностей она вводилась. Тем самым получаем отображение из X в $\tilde{X}$, действующее по правилу $x \mapsto (x, \varepsilon_x)$, где ε_x — введенная по вышеописанному правилу ориентация на $\mathcal{T}_x X$. Легко видеть, что это отображение является гладким сечением ориентирующего накрытия. $\square$

Следствие 26.9. *Всякое односвязное многообразие оринентируемо.*

Приведем теперь пример неориентируемого многообразия.

Пример 26.10. Покажем, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо при нечетном n и неориентируемо при четном n.

Пусть сначала n нечетно. Зафиксируем какую-нибудь ориентацию на сфере S^n и рассмотрим естественную проекцию (двулистное накрытие) $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$. Очевидно, $p \circ \iota = p$, где ι — антиподальное отображение из примера 26.3. Для каждой точки $x \in \mathbb{R}P^n$ выберем произвольным образом прообраз $y \in p^{-1}(x)$ и перенесем в $\mathcal{T}_x \mathbb{R}P^n$ ориентацию из $\mathcal{T}_y S^n$ с помощью отображения p_*. Поскольку второй прообраз точки x равен $\iota(y)$ и отображение ι при нечетном n сохраняет ориентацию сферы, полученная таким образом ориентация на $\mathcal{T}_x X$ не зависит от выбора прообраза и тем самым определена корректно. Непрерывная зависимость ориентации от точки очевидна.

Пусть теперь n четно. По-прежнему зафиксируем ориентацию на S^n. На сей раз антиподальное отображение сферы ориентацию обращает (см. пример 26.3), так что, если y и $\iota(y)$ — два прообраза точки $x \in \mathbb{R}P^n$ при отображении p, то p_* индуцирует две противоположные ориентации на $\mathcal{T}_x\mathbb{R}P^n$ — одну с точки y, другую с точки $\iota(y)$. Стало быть, всякую пару (x, ε), где $x \in \mathbb{R}P^n$ и ε — ориентация на $\mathcal{T}_x\mathbb{R}P^n$, можно отождествить с одним из прообразов точки x при отображении p, то есть с точкой на сфере. Легко видеть, что это отождествление является диффеоморфизмом $u\colon S^n \to \widetilde{\mathbb{R}P^n}$, совместимым с проекциями на S^n (то есть $\pi \circ u = p$). Стало быть, $\mathbb{R}P^n$ при четном n ориентируемо тогда и только тогда, когда проекция $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ имеет сечение, а это неверно при любом n (чтобы это доказать, достаточно посмотреть, какие отображения индуцируют проекция p и гипотетическое сечение s на фундаментальных группах).

Приведем еще одну характеризацию ориентируемости.

Предложение 26.11. *Гладкое многообразие размерности n ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем существует дифференциальная форма степени n, нигде не обращающаяся в нуль.*

Доказательство. Пусть ω — форма с таким свойством. Ясно, что X можно покрыть локальными картами (U, φ), где $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, для которых $(\varphi^{-1})^*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ со всюду положительной функцией f (для всякой связной окрестности знак f постоянен, так как ω не обращается в нуль; если для какой-то карты f отрицательна, «подправим» карту, скомпоновав ее с отражением пространства $\mathbb{R}^n$). Очевидно, якобианы функций перехода таких локальных карт всегда положительны; ввиду предложения 26.8 этим доказана часть «тогда».

Пусть, напротив, многообразие X ориентируемо. Зафиксируем систему локальных карт с сохраняющими ориентацию функциями перехода. Воспользуемся такой леммой:

Лемма 26.12. *Для всякого открытого покрытия (паракомпактного) гладкого многообразия X существует подчиненное этому покрытию локально конечное разбиение единицы, состоящее из гладких функций.*

Доказательство этой леммы мы опустим; скажем лишь, что оно вполне аналогично доказательству предложения 12.10, причем по ходу дела используются функции, построеннные в лемме 22.6.

Рассмотрим теперь гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию нашего многообразия координатными окрестностями с сохраняющими ориентацию функциями перехода. Пусть f_U — функция из нашего разбиения, носитель которой содержится в U, где $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$. Построим на U дифференциальную форму ω_U, записывающуюся в этих локальных координатах в виде

$(f_U \circ \varphi^{-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Ясно, что она продолжается нулем до формы на всем X. Поскольку якобианы функций перехода положительны, любая форма ω_U в любой из карт нашего семейства запишется в виде $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ с неотрицательной функцией f, и для любой точки $x \in X$ найдется хотя бы одна форма ω_U, для которой $f(x) > 0$. Стало быть, форма $\omega = \sum \omega_U$ (сумма имеет смысл, так как семейство форм локально конечно) нигде не обращается в нуль, что и требовалось. $\square$

Теперь перейдем ко второму ингредиенту нашей теории — многообразиям с краем. Простейшим примером многообразия с краем является замкнутый n-мерный шар в $\mathbb{R}^n$.

Прежде, чем давать точные определения, договоримся, в расширение соглашения 25.6, что диффеоморфизмом двух произвольных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ будет называться их гомеоморфизм, продолжающийся до диффеоморфизма некоторых их окрестностей.

Обозначение 26.13. Пусть

$$H^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant 0 \}.$$

Подмножество $H^n \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым полупространством.*

Определение 26.14. *n-мерным многообразием с краем* называется хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, наделенное следующей дополнительной структурой:

(1) X представлено в виде объединения открытых подмножеств U_α, называемых *координатными окрестностями.*

(2) Для каждой координатной окрестности U_α задан гомеоморфизм $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset H^n$ — открытое подмножество.

(3) Пусть U_α и U_β — две координатные окрестности с непустым пересечением. Тогда отображение

$$\varphi_{\alpha\beta} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом открытых подмножеств в H^n.

Из теоремы об обратной функции немедленно следует, что при диффеоморфизме открытых подмножеств в H^n точки, лежащие на граничной гиперплоскости, переходят в точки, лежащие на граничной гиперплоскости[1]. Стало быть, все точки многообразия с краем делятся на два типа: точки,

[1]Это утверждение, кстати, будет верно, если заменить слово «диффеоморфизм» на «гомеоморфизм», но доказательство для этого случая существенно труднее.

образы которых в каких-то (стало быть, и любых) локальных координатах лежат внутри H^n и точки, образы которых в локальных координатах лежат на границе H^n. Множество точек второго типа называется *краем* многообразия X и обозначается ∂X. Ясно, что край n-мерного многообразия будет $n-1$-мерным многообразием (уже без края). (Множество точек первого типа, очевидно, является n-мерным многообразием без края.)

Типичный пример многообразия с краем дается следующим предложением, доказательство которого оставляется читателю:

Предложение 26.15. *Пусть X — n-мерное гладкое многообразие (без края), и пусть f — гладкая функция на X. Предположим, что $df \neq 0$ в каждой из точек $x \in X$, для которых $f(x) = 0$. Тогда множество $\{ x \in X \mid f(x) \geqslant 0 \}$ является n-мерным многообразием с краем.*

Нетрудно видеть, что при диффеоморфизмах и гладких отображениях открытых подмножеств в H^n корректно определены частные производные и, стало быть, матрицы Якоби. Поэтому на многообразиях с краем также можно определить дифференциальные формы (например, как выражения, записывающиеся в локальных координатах в виде $\sum f_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и преобразующиеся по известным правилам при замене локальных координат). Далее, поскольку определены якобианы функций перехода, можно определить и ориентацию многообразия с краем (например, с помошью системы координатных окрестностей с положительными якобианами функций перехода).

Предложение-определение 26.16. Пусть X — ориентированное n-мерное многообразие с краем. Тогда на ∂X можно ввести *индуцированную ориентацию* следующим образом: объявим базис $(v_1, \dots, v_{n-1})$ в $\mathcal{T}_x \partial X$ положительно ориентированным, если положительно ориентирован базис в $\mathcal{T}_x X$ вида $(e, v_1, \dots, v_{n-1})$, где e — вектор в $\mathcal{T}_x X$, направленный «наружу» многообразия. Последнее, по определению, означает, что в каких-то (стало быть, и в любых) локальных координатах вектор e переходит в вектор $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ с отрицательным a_1.

Нетрудно видеть, что это действительно корректное определение ориентации. В частности, при ином выборе «направленного наружу» вектора e ориентация базиса не изменится. Ср. также определение ориентации на сфере в примере 26.3.

Теперь все готово для того, чтобы дать основные определения. Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ какую-нибудь ориентацию.

Предложение 26.17. *Пусть X — n-мерное ориентированное многообразие (возможно, с краем). Пусть $\varphi \colon U \to X$ — локальная карта, сохраняющая ориентацию, где $U \subset H^n$ — открытое подмножество, и пусть*

$\omega \in \Omega^n(X)$ — такая дифференциальная форма, что $\operatorname{supp}\omega$ *компактен и содержится в $\varphi(U)$. Если $\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, то интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx_1 \dots dx_n$ не зависит от выбора сохраняющей оринетацию локальной карты.*

Доказательство. Пусть $\psi\colon V \to X$ — другая локальная карта, сохраняющая ориентацию и такая, что $\operatorname{supp}\omega \subset \psi(V)$; положим $\psi^*\omega = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$. Поскольку обе карты сохраняют ориентацию, якобиан $\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}$ положителен и тем самым совпадает со своей абсолютной величиной. Стало быть, по теореме о замене переменной имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\,dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} g\,dy_1 \dots dy_n,$$

что и требовалось. □

Доказанное предложение показывает, что следующее определение корректно.

Определение 26.18. Пусть $\omega \in \Omega^n(X)$ — дифференциальная форма, где X — ориентированное n-мерное многообразие с краем. Предположим, что $\operatorname{supp}\omega$ компактен и содержится в $\varphi(U)$, где $\varphi\colon U \to X$ — сохраняющая ориентацию локальная карта. Тогда *интегралом формы ω по многообразию X* называется число $\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n$, где $\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Обозначение: $\int_X \omega$.

Предложение-определение 26.19. Пусть ω — дифференциальная форма степени n с компактным носителем на n-мерном многообразии X с краем. Тогда *интегралом от формы ω по многообразию X* называется число $\sum \int_X f_i\omega$, где $\{f_i\}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию X координатными окрестностями, а интегралы понимаются в смысле определения 26.18. От выбора разбиения единицы это число не зависит; обозначается оно $\int_X \omega$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству корректности определения интеграла по открытому множеству в лекции 12 (предложение 12.15): если $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$ — два разбиения единицы, проверяется, что

$$\sum_i \int_X f_i\omega = \sum_{i,j} \int_X f_i g_j \omega = \sum_j \int_X g_j \omega.$$

□

Наконец, последнее определение:

Определение 26.20. Пусть X — многообразие (возможно, с краем), $Y \subset X$ — ориентированное подмногообразие размерности k, и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда полагаем по определению $\int_Y \omega = \int_Y i^*\omega$, где $i\colon Y \to X$ — включение.

Теперь наконец можно сформулировать теорему Стокса.

Теорема 26.21 (Теорема Стокса: второй вариант). *Пусть X — n-мерное ориентированное многообразие с краем и $\omega \in \Omega^{n-1}(X)$ — дифференциальная форма с компактным носителем. Тогда*

$$\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega,$$

где ориентация на ∂X индуцирована ориентацией на X в смысле определения 26.16.

Доказательство. Можно, очевидно, ограничиться случаем, когда $\operatorname{supp} \omega \subset \varphi(U)$, где $U \subset H^n$ открыто и φ — сохраняющая ориентацию локальная карта. Положим $\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ и разберем два случая.

1. U не пересекается с границей H^n. В этом случае $\int_{\partial X} \omega = 0$, но и $\int_X d\omega = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n = 0$ (сведите интеграл к повторному, начав с интегрирования по dx_i, и примените формулу Ньютона-Лейбница).

2. U имеет непустое пересечение с границей H^n. Если $i \neq 1$, то левая часть формулы равна нулю, так как $\omega|_{\partial X} = 0$, а правая часть равна нулю по той же причине, что и в первом случае (повторное интегрирование можно начать с интегрирования по $\mathbb{R}$ производной по x_i от гладкой функции с компактным носителем). Если, наконец, $i = 1$, то правая часть равна $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \ldots dx_n$, а левая часть равна $-\int_{R^{n-1}} f(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$ (знак «минус» возник, так как базис $\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в касательном пространстве к ∂H^n отрицательно ориентирован в соответствии с нашим определением индуцированной ориентации). Теперь совпадение левой и правой частей немедленно получается с помощью повторного интегрирования, начинающегося с интегрирования по dx_1 (применить все ту же формулу Ньютона-Лейбница). $\square$

Следствие 26.22. *Если ω — дифференциальная форма степени $n - 1$ (с компактным носителем) на ориентированном n-мерном многообразии X без края, то $\int_X d\omega = 0$.*